

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
EKONOMICKÁ FAKULTA

STUDIJNÍ PROGRAM: **Studijní program hospodářská politika a správa**

STUDIJNÍ OBOR: **Finance**

EMPIRICKÉ OVĚŘENÍ MODELŮ ÚROKOVÝCH SAZEB

Diplomová práce

Vedoucí diplomové práce: doc. Dr. Ing. Zdeněk Zmeškal

Jerzy Szurman

Akademický rok: 2003/2004

„Místopřísežně prohlašuji, že jsem celou práci včetně všech příloh vypracoval samostatně.
Přílohu č. 1, danou mi k dispozici, jsem samostatně doplnil.“

V Ostravě dne

Jerzy Szurman

Prohlášení o využití výsledků diplomové práce

Prohlašuji, že

- byl jsem seznámen s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. – autorský zákon, zejména §35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a §60 – školní dílo,
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen VŠB-TUO) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě diplomovou práci užit (§35 odst. 3),
- souhlasím s tím, že jeden výtisk diplomové práce bude uložen v Ústřední knihovně VŠB-TUO k prezenčnímu nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího diplomové práce. Souhlasím s tím, že údaje o diplomové práci, obsažené v Záznamu o závěrečné práci, umístěném v příloze mé diplomové práce, budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO,
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užit dílo v rozsahu §12 odst. 4 autorského zákona,
- bylo sjednáno, že užití své dílo – diplomovou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich výše).

V Ostravě dne

.....

Jerzy Szurman

Adresa trvalého pobytu diplomanta:

.....

1. Úvod

Úroková sazba je jednou nejdůležitějších ekonomických veličin. S pomocí úrokové sazby jako jednoho z finančních ukazatelů určíme, zda investovat či spořit, zda půjčit či vypůjčit. Většina rozhodnutí by neměla být učiněna bez predikce budoucí úrokové sazby, neboť i malá změna úrokové sazby může v důsledku značných objemů peněz protékajících ekonomikou způsobit nečekaně vysokou ztrátu. Práce je věnována problematice empirického ověření modelů úrokových sazeb.

Existují modely, které popisují vývoj krátkodobé úrokové sazby jako náhodný proces. Tyto modely se vyznačují různým počtem parametrů a proměnných. Velký počet modelů pracuje s jedinou proměnnou – minulou úrokovou sazbou. K další skupině modelů úrokových sazeb patří modely odhadu volatility úrokových sazeb, které nejčastěji představují lineární kombinaci skutečné volatility a chyb v její predikci.

Cílem práce je ověřit vybrané modely úrokových sazeb včetně odhadnutí jejich parametrů s použitím různých vstupních dat i metod odhadu.

První část je věnována problematice úrokových sazeb a výnosových křivek. Následuje popis modelů úrokových sazeb a metod odhadu jejich parametrů. V závěru teoreticko-metodické části jsou nastíněny hlavní principy analýzy hlavních komponent, statistické metody, která se zabývá analýzou úrokových sazeb různých dob do splatnosti.

Druhá část je zaměřena na ověření vybraných modelů úrokových sazeb, zejména na modely náhodného vývoje krátkodobé úrokové sazby a na modely predikce její volatility.

2. Charakteristika úrokových sazeb a výnosových křivek

2.1. Podstata výnosových křivek

Výnosová křivka neboli časová struktura úrokových sazeb graficky představuje závislost výnosu do splatnosti obligace nebo jiných cenných papírů s pevnými příjmy na době do splatnosti. Výnos do splatnosti je jednou ze základních charakteristik jakéhokoliv instrumentu s fixními příjmy a lze jej odvodit jako vnitřní výnosové procento, při kterém současná hodnota budoucích peněžních toků bude rovna aktuální tržní ceně.

V případě diskrétního úročení platí

$$TCO = \sum_t CF_t (1 + y)^{-t}, \quad (2.1)$$

a pro spojitě úročení je

$$TCO = \sum_t CF_t \cdot e^{-y \cdot t}, \quad (2.2)$$

kde TCO je tržní cena obligace,
 CF_t je peněžní toky v čase t ,
 y je nominální výnos do splatnosti.

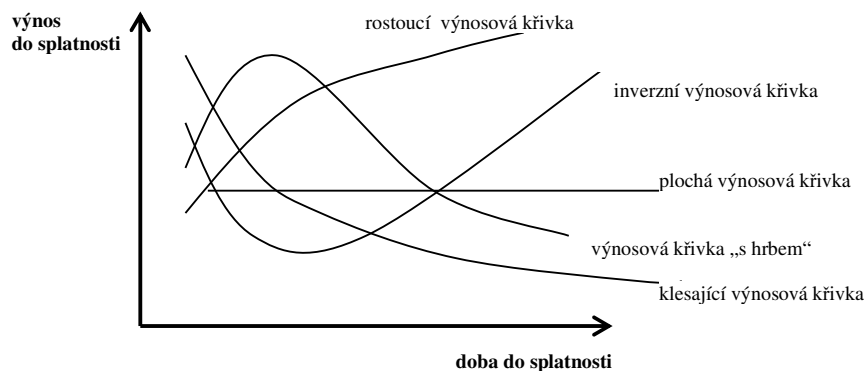
Výnosová křivka se nejčastěji sestavuje z obligací. Jelikož výnosová křivka vyjadřuje pouze vztah mezi výnosem do splatnosti a dobou do splatnosti, je třeba vybrat takové obligace, které se liší pouze dobou do splatnosti a ostatní identifikační charakteristiky obligací zůstávají stejné. V praxi to znamená, že se hledají obligace stejné likvidity, stejné míry rizika, stejné daňové úpravy. Nalézt větší počet obligací, které by splňovaly stejné podmínky je obtížné a proto se konstrukce výnosové křivky omezuje na státní bezrizikové dluhopisy. Výsledná výnosová křivka je z důvodu bezrizikových výnosností základní výnosovou křivkou, od které se odvozují výnosové křivky pro ostatní cenné papíry.

Výnosovou křivku lze sestavit i z úrokových sazeb na mezibankovním trhu depozit či z výnosností instrumentů peněžního trhu. K tomuto účelu se používají sazby PRIBOR (PRague InterBank Offered Rate) a IRS (Interest Rate Swap).

Byly zaznamenány různé tvary výnosových křivek. Nejčastěji je výnosová křivka rostoucí funkcí, ale může být rovněž funkcí klesající. Výjimkou nejsou ani ploché, inverzní výnosové křivky, křivky „s hrbem“ či ve tvaru písmene „U“. Pro názornost lze uvést, že výnosová křivka „s hrbem“ byla zaznamenána v České republice v době měnové krize (1997),

kdy krátkodobé sazby rapidně vzrostly a byly dokonce několikanásobně vyšší než sazby dlouhodobé. Obrázek 2-1 ukazuje jednotlivé tvary výnosových křivek.

Obrázek 2-1 Tvary výnosových křivek



2.2. Vztah úrokových sazeb z hlediska splatnosti

Úrokové sazby lze členit podle nejrůznějších hledisek. Obvykle se úrokové sazby člení podle doby do splatnosti na:

- krátkodobé (do 1 roku),
- střednědobé (1-5 let) a
- dlouhodobé (nad 5 let).

Vzájemný vztah těchto sazeb je možné zkoumat při pohledu na korelační resp. kovarianční matici. Tabulka 2-1 ukazuje korelační matici úrokových sazeb s rozptyly na diagonále amerických úrokových sazeb Treasury Constant Maturity Rate se splatností 3 a 6 měsíců, 1, 2, 3, 5, 7, 10 a 20 let. Byly zvoleny týdenní kurzy těchto úrokových sazeb z období od 08. 05. 1998 do 30. 1. 2004.

Při pohledu na diagonálu matice, kde jsou zobrazeny rozptyly jednotlivých úrokových sazeb, je zřejmá všeobecná skutečnost, že nominální dlouhodobé sazby jsou méně volatilnější než sazby krátkodobé.

Kdyby se úrokové sazby pohybovaly paralelně, hodnoty jednotlivých prvků diagonály by se shodovaly a ostatní prvky matice by byly rovny jedné.

Z tabulky 2-1 je rovněž vidět, že i když se sazby nepohybují paralelně, změny v úrokových sazbách s různou dobou splatnosti jsou vysoce korelované. Dlouhodobé sazby jsou korelovány s krátkodobými sazby méně než střednědobé sazby s krátkodobými.

Tabulka 2-1 Korelační matice s rozptyly úrokových sazeb na diagonále

3M	3,594								
6M	0,998	3,749							
1Y	0,991	0,996	3,382						
2Y	0,967	0,977	0,990	2,962					
3Y	0,948	0,960	0,978	0,997	2,349				
5Y	0,906	0,921	0,946	0,980	0,991	1,430			
7Y	0,877	0,894	0,923	0,964	0,980	0,996	1,050		
10Y	0,829	0,848	0,881	0,932	0,954	0,983	0,993	0,629	
20Y	0,753	0,775	0,815	0,877	0,906	0,944	0,967	0,981	0,308
	3M	6M	1Y	2Y	3Y	5Y	7Y	10Y	20Y

2.3. Spotové a forwardové úrokové sazby

Obecně lze výnos z držení obligace vypočítat jako vnitřní výnosové procento, které vyrovnává levou i pravou stranu rovnice:

$$TCO = \sum_t CF_t (1 + y)^{-t} \quad (2.3)$$

Pro rozlišování spotového a forwardového výnosu je třeba nejdříve přistoupit k označování těchto výnosů. Předpokládá se, že výnos můžeme zobecněně označit jako:

${}_a y_{b,c}$

kde

- a je moment, kdy výnos určujeme,
- b je počátek, ze kterého počítáme výnos a
- c je konec intervalu, ze kterého je daný výnos určen.

Spotový výnos r je výnos, jehož moment, kdy o tomto výnosu rozhodujeme je stejný s momentem, ze kterého daný výnos počítáme:

$${}_0 y_{0,t} = r_t$$

Forwardový výnos f je vždy výnosem, který se vztahuje na určitý interval v budoucnosti:

$${}_0y_{t_1,t} = f_t$$

Určítým typem forwardového výnosu je tzv. short výnos s , který je forwardovým výnosem pro jedno období, kde $t_1 - t = 1$:

$${}_0y_{t_1,t} = f_t = s_t.$$

Vzájemný vztah spotových a forwardových úrokových sazeb lze jednoduše odvodit. Předpokládá se nemožnost arbitráže, zanedbání transakčních nákladů a stejná výše zápůjční a výpůjční sazby. Investor se rozhoduje zda má koupit:

- diskontovanou obligaci s dvouletou splatností a nominální hodnotou 100 nebo
- diskontovanou jednoroční obligací a v době splatnosti ještě jednu diskontovanou jednoroční obligaci .

Investor bude lhostejný (indiferentní) vůči výběru jedné ze dvou alternativ, pokud každá z alternativ zajistí stejný výnos ve dvouletém investičním horizontu. Investor tedy odhaduje, jaká by musela být forwardová úroková sazba druhé jednoroční obligace z druhé alternativy, aby daná podmínka byla splněna.

Cena dvouleté obligace s nominální hodnotou je rovna $\frac{100}{(1+r_2)^2}$, kde r_2 je dvouletý spotový výnos. Pro druhou alternativu investor předpokládá za první obligaci vynaložit částku X , kdy na konci prvního roku obdrží částku $X \cdot (1+r_1)$, kde r_1 je jednoroční spotový výnos. Jestliže investor obdrženou částku opět investuje na období jednoho roku, potom výsledná částka bude rovna $X \cdot (1+r_1) \cdot (1+f)$, kde f je forwardový výnos z období (1;2). Chce-li obdržet na konci dvouletého intervalu částku 100, potom je třeba investovat částku X tak, aby:

$$X \cdot (1+r_1) \cdot (1+f) = 100, \text{ po úpravě:}$$

$$X = \frac{100}{(1+r_1) \cdot (1+f)}$$

Jestliže má být investor indiferentní mezi oběmi alternativami a obdržet po uplynutí 2 let částku 100, je třeba zajistit takový forwardový výnos f aby:

$$\frac{100}{(1+r_2)^2} = \frac{100}{(1+r_1) \cdot (1+f)}, \text{ kde levá strana představuje volbu první alternativy a pravá strana}$$

druhou alternativu. Po úpravě forwardový výnos f je roven:

$$f = \frac{(1+r_2)^2}{(1+r_1)^1} - 1$$

Zobecněním tohoto vztahu dostáváme:

$$f_t = \left[\frac{(1+r_t)^t}{(1+r_{t-dt})^{t-dt}} \right]^{\frac{1}{dt}} - 1, \quad (2.4)$$

kde f_t je forwardový výnos,
 r_t je spotový výnos,
 dt je časový interval pro forwardovou sazbu.

Úpravou rovnice (2.4) obdržíme:

$$(1+r_t)^t = (1+r_{t-dt})^{t-dt} \cdot (1+f_t)^{dt}. \quad (2.5)$$

Verze pro spojitě úročení zní:

$$e^{r_t \cdot t} = e^{r_{t-dt} \cdot (t-dt)} \cdot e^{f_t \cdot dt} \quad (2.6)$$

a tedy,

$$f_t = \frac{r_t \cdot t - r_{t-dt} \cdot (t-dt)}{dt}. \quad (2.7)$$

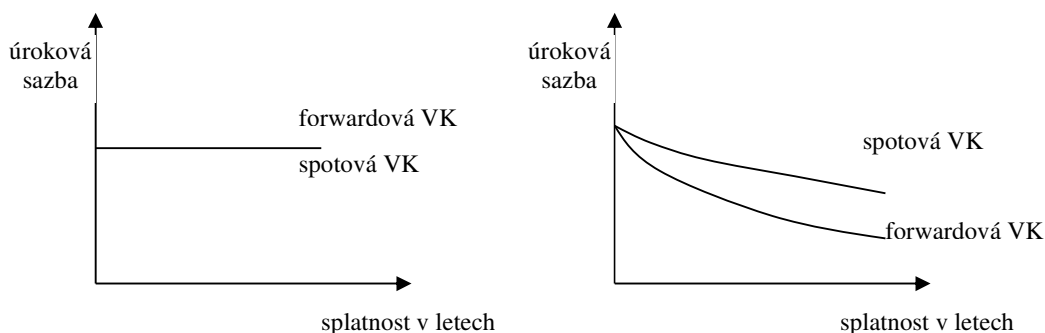
Každý spotový a forwardový výnos lze vyjádřit pomocí krátkodobé (short) sazby následně:

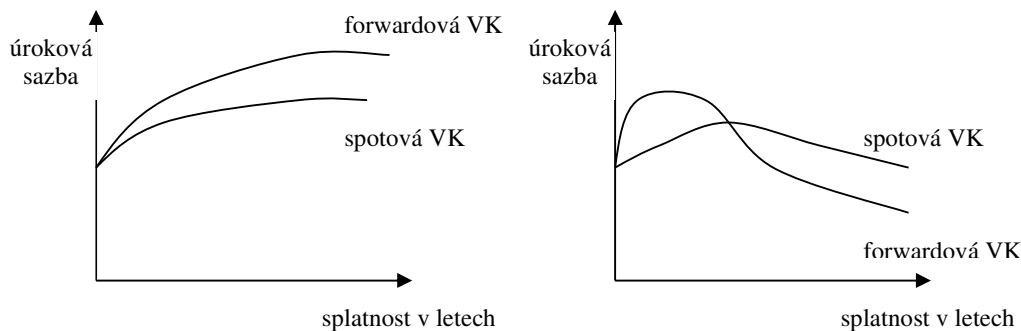
$$(1+r_t)^t = (1+s_1) \cdot (1+s_2) \cdot \dots \cdot (1+s_t), \quad (2.8)$$

$$(1+f_t)^{dt} = (1+s_{t-dt+1}) \cdot (1+s_{t-dt+2}) \cdot \dots \cdot (1+s_t). \quad (2.9)$$

Výše uvedený, matematicky popsán, vztah mezi spotovou a forwardovou sazbou je možno přenést i do oblasti výnosových křivek. Vzájemná závislost spotové a forwardové křivky je analogická se závislostí křivek průměrných a marginálních veličin. Obrázek 2-2 graficky zobrazuje čtyři možné polohy spotové a forwardové křivky v závislosti na tvaru těchto křivek.

Obrázek 2-2 Vzájemné vztahy spotových a forwardových výnosových křivek





2.4. Konstrukce výnosové křivky

Jak již bylo řečeno, ke konstrukci výnosové křivky je nutné použít obligace stejného typu s výjimkou doby do splatnosti. Nejčastěji se používají obligace s nulovým kupónem (zero-coupon bond), které jsou definovány vztahy pro diskrétní a spojitě úročení takto:

$$TCO = NH \cdot (1 + r_t)^{-t}, \quad (2.10)$$

$$TCO = NH \cdot e^{-r_t \cdot t}, \quad (2.11)$$

kde NH je nominální hodnota obligace resp. hodnota v době splatnosti,

r_t je výnos do splatnosti v čase t .

Pokud nemáme dostatek diskontovaných obligací, lze použít kupónové obligace, pro které platí:

$$TCO = \sum_{i=t_1}^{t_{s-1}} \frac{K}{(1 + r_i)^i} + \frac{K + NH}{(1 + r_{t_s})^{t_s}}, \quad (2.12)$$

$$TCO = K \cdot \sum_{i=t_1}^{t_{s-1}} e^{-r_i \cdot i} + (K + NH) \cdot e^{-r_{t_s} \cdot t_s}, \quad (2.13)$$

kde K je kupónová platba,

r_i je výnos do splatnosti v čase i pro $i = t_1, t_2, \dots, t_{s-1}$,

t_s je období splatnosti obligace.

Ke konstrukci výnosové křivky se použijí výše uvedené rovnice, kde hledanou neznámou veličinou je r_i .

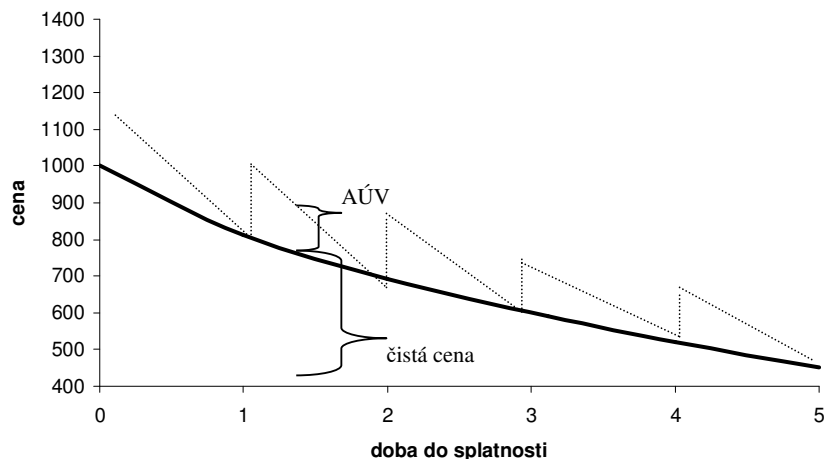
Tržní cenou obligace (TCO) se rozumí hrubá cena obligace. Ta se skládá s čisté ceny neboli kurzu, který je kótován v procentech z nominální hodnoty a z alikvotního úrokového

výnosu (AÚV). Alikvotní úrokový výnos představuje poměrnou část kupónu, která naběhla od poslední výplaty kupónu.

$$TCO = kurz \cdot \frac{NH}{100} + AÚV \quad (2.14)$$

Důvodem rozlišování čisté a hrubé ceny je hřebenovitý tvar vztahu TCO a doby do splatnosti jak ukazuje obrázek 2-3.

Obrázek 2-3 Závislost ceny obligace na době do splatnosti

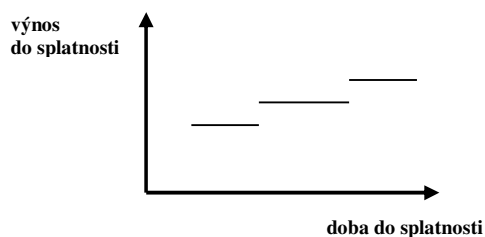


2.5. Vývoj výnosových křivek

Tvar výnosové křivky nemusí být vždy spojitý. Většinou výnosové křivky jsou spojitě v rámci krátkých intervalů, přičemž na jejich hranicích dochází k posunům. Byly pozorovány následující základní posuny:

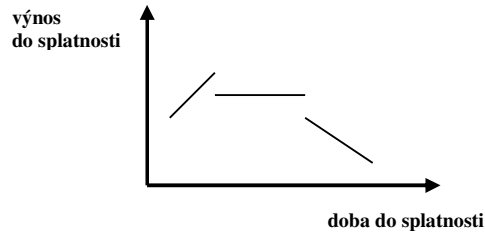
- a) **paralelní posuny** – tvar výnosové křivky zůstává zachován, všechny sazby se změní o konstantní výši na vyšší nebo nižší úroveň.

Obrázek 2-4 Paralelní posuny VK



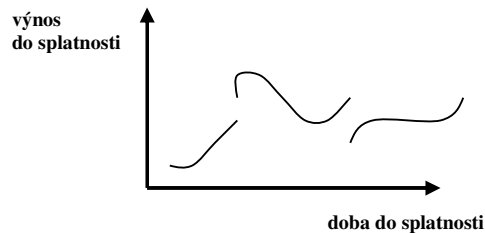
- b) **stupňovité změny** – v tomto případě dochází ke skokovým změnám výnosů do splatnosti, což znamená, že sklony výnosových křivek se liší, ale tvar zůstává zachován.

Obrázek 2-5 Stupňovité změny VK



- c) **změna tvaru výnosových křivek** – tyto posuny znamenají, že tvary výnosových křivek nejsou nijak pravidelné a mění se v rámci intervalů. Jsou to nejsložitější změny, neboť těžce lze odhadnout jejich závislost.

Obrázek 2-6 Změna tvaru VK



2.6. Typy výnosových křivek

Výnosová křivka představuje závislost výnosu obligace na době do splatnosti. Jestliže lze spočítat různé druhy výnosů obligací, potom lze obdržet i různé druhy výnosových křivek, viz Blake (1995). K nejpodstatnějším patří výnosová křivka:

- z výnosů do splatnosti (yield to maturity, YTM),
- kupónová,
- nominální,
- promptní a
- forwardová.

Výnosová křivka z výnosů do splatnosti je nejznámější a graficky představuje závislost mezi výnosem do splatnosti a dobou do splatnosti identické skupiny dluhopisů. Musíme však brát v úvahu, že definice YTM počítá s reinvesticí jednotlivých kupónů za výnos shodný s YTM. Jelikož se úrokové sazby mění, je nutné u kupónových obligací počítat s reinvestičním rizikem. Výjimkou jsou diskontované obligace. Obecně lze říci, že kupónové platby plynoucí z obligací nejsou diskontovány odpovídajícími úrokovými sazbami, což řeší následující typy výnosových křivek.

Kupónová výnosová křivka znázorňuje vztah mezi výnosem do splatnosti a dobou do splatnosti u obligací se stejně velikým kupónem. Při konstrukci výnosové křivky je nutné počítat s kupónem, protože v opačném případě se dopouštíme určitého zkreslení mající vliv na průběh výnosové křivky. Určité řešení přináší konstrukce výnosové roviny znázorňující závislost výnosu do splatnosti na době do splatnosti a kupónu obligací.

Jestliže konstruujeme výnosovou křivku obligací, které se obchodují za nominální hodnotu, potom hovoříme o **nominální výnosové křivce**. V tomto případě je výnos do splatnosti obligace roven velikostí jejího kupónu. Tuto výnosovou křivku se využívá při primárních emisích nových obligací emitovaných za nominální cenu.

Promptní výnosová křivka je křivkou, která znázorňuje závislost promptních neboli okamžitých výnosů obligací na době do splatností. Nejjednodušeji ji lze sestavit z obligací s nulovým kupónem, proto bývá někdy nazývána výnosovou křivkou obligací s nulovým kupónem. Promptní výnosy odpovídají jednotlivým úrokovým sazbám v rovnici (2.12).

Forwardová výnosová křivka pracuje s forwardovými výnosy, které byly popsány dříve.

2.7. Teorie výnosových křivek

Časovou strukturu úrokových sazeb se pokouší vysvětlit několik teorií, mezi které se řadí:

- Čistá teorie očekávání
- Teorie preference likvidity

- Teorie oddělených trhů (segmentační teorie)
- Teorie preferovaného umístění

Podle **čisté teorie očekávání** výnos do splatnosti dlouhodobé obligace je shodný s výnosem, který by investor obdržel, pokud by opakovaně investoval peníze do série krátkodobých obligací až do doby splatnosti dlouhodobé obligace. Z toho vyplývá, že investoři nebudou držet žádné obligace jejichž očekávaný výnos je menší než očekávaný výnos jiné obligace s odlišnou dobou splatnosti a že současný rozdíl mezi výnosnostmi dlouhodobé a krátkodobé obligace (spread) v sobě obsahuje předpověď výnosnosti krátkodobé obligace v budoucnu.

Teorie preference likviduje pracuje s pojmem „termínová prémie“ což je rozdíl mezi implicitní forwardovou sazbou a očekávanou spotovou sazbou. Termínová prémie kompenzuje rizikově aversního investora za držbu obligace s delší dobou splatnosti. Delší doba do splatnosti znamená menší likviditu a rovněž vyšší míru rizikovosti změny tržních úrokových sazeb a tím pádem větší riziko poklesu výnosnosti.

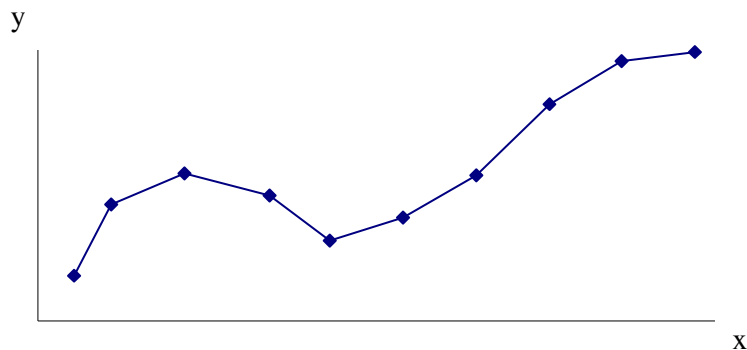
Teorie oddělených trhů říká, že trh s obligacemi je v důsledku existence velkých finančních investorů, kteří se snaží o časovou imunizaci svých portfolií, rozdělen na několik dalších trhů, které se odlišují různou dobou do splatnosti. Tak vznikne např. trh krátkodobý, střednědobý a dlouhodobý. Velikost úrokové sazby na jednotlivých oddělených trzích je dána střetem nabídky a poptávky.

Teorie preferovaného umístění je směsicí dvou předešlých teorií. Pracuje rovněž s absolutně oddělenými trhy a navíc přidává prvek očekávání. Podle této teorie může investor opustit svůj segment v případě nabídnutí vyššího výnosu jiným segmentem (dostatečně velká riziková prémie), který bude kompenzovat riziko a náklady na opuštění stávajícího segmentu.

2.8. Vyhlazování výnosových křivek

Křivka obecně znázorňuje spojení jednotlivých bodů $[x, y]$ v grafu. Pokud počet bodů je neveliký a každé dva sousední body proložíme přímkou, výsledná křivka se může jevit jako značně kostrbatá jak znázorňuje obrázek 2-7.

Obrázek 2-7 Křivka jejíž body jsou proloženy přímkami



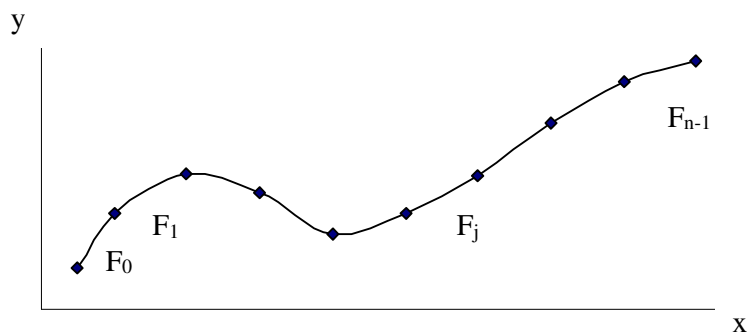
Křivka představuje určitou závislost jednotlivých bodů. Chceme-li proniknout do této závislosti a určit polohy jiných bodů, které tuto závislost respektují, použijeme techniky vyhlazování křivek. Jestliže 2 body spojíme přímkou a chceme určit polohu bodu na této přímce, musíme mít na zřeteli, že i když to není nijak obtížné, výsledný bod nemusí odpovídat charakteru a vlastnostem křivky. Techniky vyhlazování křivek proto usilují o věrné zobrazení závislosti jednotlivých bodů tvořících křivku.

Jedna ze základních vyhlazovacích technik je technika, která vychází z používání sérií polynomických funkcí, tzn. že každá křivka se skládá z jednotlivých polynomických funkcí, které jsou omezeny souřadnicemi základního souboru dat, který definujeme:

$$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_j, y_j), \dots, (x_n, y_n)\} \quad x_0 < x_1 < \dots < x_j < \dots < x_n$$

Celková křivka na intervalu $[x_0, x_n]$ je konstruována ze série jednotlivých polynomických funkcí F_0 až F_{n-1} .

Obrázek 2-8 Křivka jejíž body jsou proloženy polynomickými funkcemi



V nejjednodušší verzi je polynomická funkce funkcí lineární, mající tvar:

$$F(x) = mx + c \tag{2.15}$$

kde každá jednotlivá lineární funkce má různé hodnoty parametrů m a c .

Výsledkem není hladká křivka, ale křivka, která vznikla obyčejným spojením jednotlivých bodů přímkou (obrázek 2-7). Proto se místo lineárních funkcí používají funkce kubické s mnohočleny třetího stupně:

$$F_j(x) = y_j + a_j(x - x_j) + b_j(x - x_j)^2 + c_j(x - x_j)^3, \quad (2.16)$$

pro $j = 0, \dots, n - 1$,

kde x_j a y_j jsou hodnoty základního souboru.

K vypočtení parametrů a_j , b_j , c_j je nutno vypočítat řadu dalších přechodných proměnných:

$$m_j = x_{j+1} - x_j \quad j = 0, 1, \dots, n - 1 \quad (2.17)$$

$$n_j = y_{j+1} - y_j \quad j = 0, 1, \dots, n - 1 \quad (2.18)$$

$$p_j = 2 \cdot (m_{j-1} + m_j) \quad j = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (2.19)$$

$$q_j = 3 \cdot \left(\frac{n_j}{m_j} - \frac{n_{j-1}}{m_{j-1}} \right) \quad j = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (2.20)$$

Následuje výpočet vektoru \underline{b} :

$$\underline{b} = \underline{P}^{-1} \underline{q} \quad (2.21)$$

kde matice \underline{P} , vektory \underline{b} a \underline{q} mají tyto tvary:

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} p_1 & m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ m_1 & p_2 & m_2 & 0 & & \vdots \\ 0 & m_2 & p_3 & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & m_{n-3} & 0 \\ \vdots & & & m_{n-3} & p_{n-2} & m_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & m_{n-2} & p_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \underline{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ q_{n-1} \end{bmatrix}$$

Hodnotu proměnných a_j a c_j se dopočítá podle:

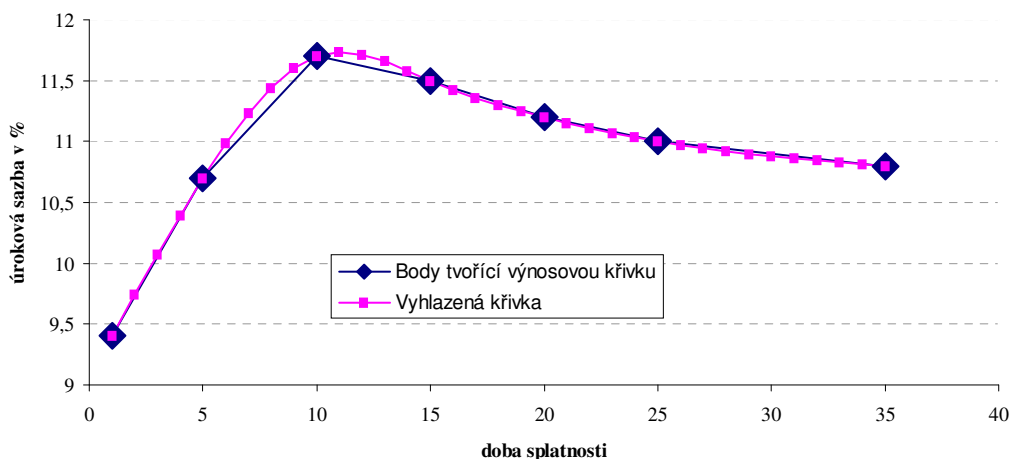
$$a_j = \frac{n_j}{m_j} - \frac{m_j}{3}(b_{j+1} + 2b_j) \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2.22)$$

$$c_j = \frac{b_{j+1} - b_j}{3m_j} \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2.23)$$

kde $b_0 = 0$ a $b_n = 0$

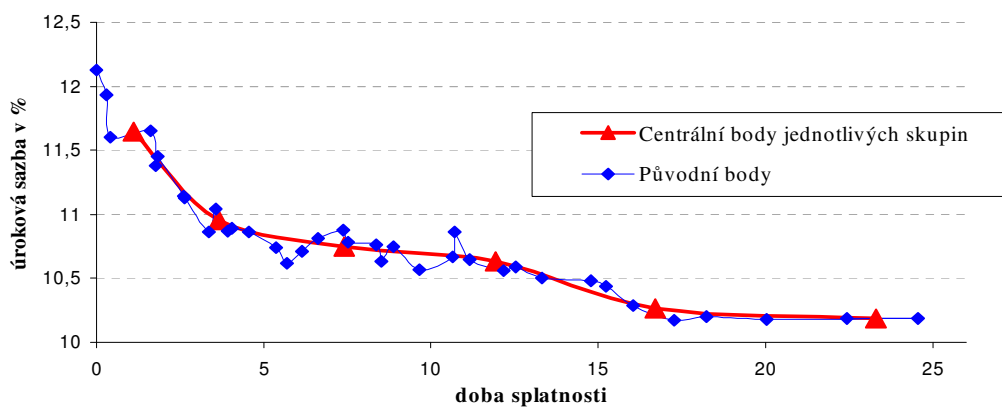
Graf 2-1 představuje příklad vyhlazené výnosové křivky, viz Adams (1993).

Graf 2-1 Vyhlazená výnosová křivka



Někdy nastává situace, kdy máme k dispozici velký počet bodů znázorňujících vztah úrokové sazby a doby do splatnosti. Pokud všechny tyto body proložíme křivkou, výsledná křivka nebude hladká jak ukazuje graf 2-2. Jednotlivé body představují charakteristiky britských vládních dluhopisů stanovených ke dni 8. 1. 1991, viz Adams (1993).

Graf 2-2 Vyhlazená výnosová křivka s centrálními body

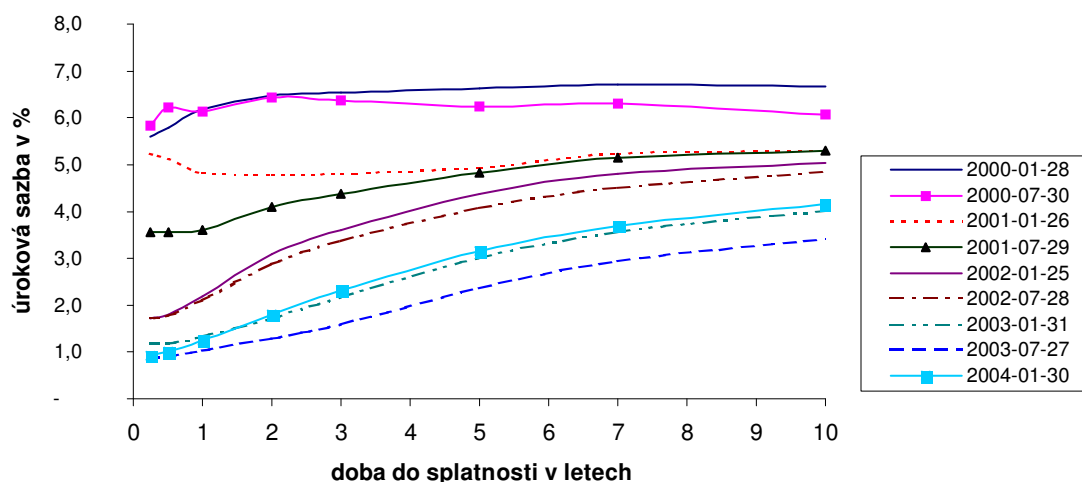


V tomto případě lze využít další metody určení hladké křivky, která reprezentuje trend původních bodů a prochází nově vytvořenými body. Princip je jednoduchý. Nejdříve se určí základní body, kterými prochází trendová linie, nebo kde se trend křivky mění. Poté se původní body přiřadí k těmto základním bodům, čímž se vytvoří různé skupinky. Ke každému základnímu bodu patří jedna skupinka. Další fází je nalezení centrálního bodu skupinky. Po určení centrálních bodů jednotlivých skupin se počítají souřadnice výsledné hladké křivky, k čemuž lze využít metodiku popsanou výše.

2.9. Výnosová křivka USA

Graf 2-3 zobrazuje vývoj výnosové křivky v čase. Jsou představeny výnosové křivky úrokových sazeb v USA, které odpovídaly sazbám Treasury Constant Maturity Rate se splatností 3 a 6 měsíců, 1, 2, 3, 5, 7 a 10 let. První výnosová křivka byla stanovena ke dni 28. 01. 2000 a každá další byla stanovena co půl roku. Je možné názorně vidět, jak se výnosová křivka mění v čase. V našem případě se výnosová křivka měnila z rostoucí křivky na inverzní a poté znovu na rostoucí.

Graf 2-3 Dynamika výnosových křivek v USA



3. Typy modelů úrokových sazeb a jejich odhady

3.1. Modely krátkodobé úrokové sazby

Obecně lze říci, že každý model je definován proměnnými a jejich parametry. Všechny modely úrokové sazby jsou stochastickými procesy, což znamená, že úrokové sazby se mění v průběhu času náhodně, ale způsob jakým se mění lze modelovat. Vývoj úrokové sazby je možno vyjádřit pomocí Itoova procesu pro náhodnou veličinu takto:

$$dr = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dz \quad (3.1)$$

Změny v hodnotě úrokových sazeb lze rozdělit na části. První část je deterministická, tedy nenáhodná, zvaná posun procesu (drift), druhá část je náhodná, označována jako komponent nestálosti – volatility či jako šum.

Krátkodobá úroková sazba je klíčovou úrokovou sazbou ve všech modelech. Obvykle se za krátkodobou úrokovou sazbu považuje jednodenní, jednotýdenní, jedno-, tří- nebo šestiměsíční úroková sazba, viz James (2000).

Bylo pozorováno, že průběh úrokových sazeb se vyznačuje tendencí k návratu k středním (dlouhodobým) hodnotám. První část modelu respektuje následující rovnici

$$\frac{dr_t}{dt} = \alpha \cdot (\mu - r_t) \quad \text{pro} \quad \alpha > 0. \quad (3.2)$$

Po úpravě:

$$dr_t = \alpha \cdot (\mu - r_t) \cdot dt, \quad (3.3)$$

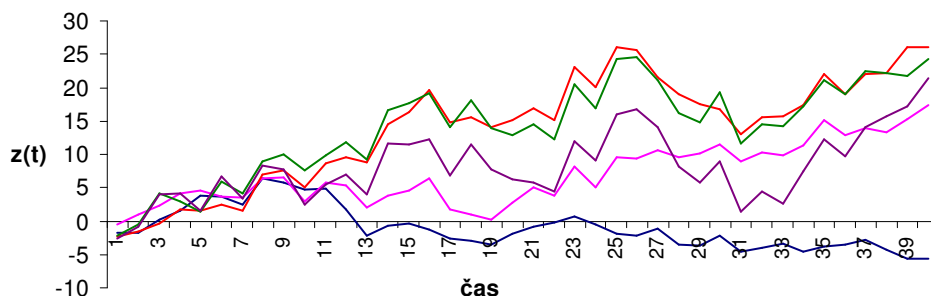
kde μ je dlouhodobá úroková sazba tzv. mean reversion level,
 α je rychlost přibližování k dlouhodobé hodnotě tzv. mean reversion rate,
 dt je časový interval,
 r_t je krátkodobá úroková sazba.

Z rovnice je zřejmé, že pokud je $\mu > r_t$, potom přírůstek úrokové sazby je kladný, což vede k růstu úrokové sazby a k přibližování se rovnovážné hodnotě μ s rychlostí α .

Druhá část rovnice (3.1) znázorňuje náhodnost, volatilitu, šum procesu. Pokud se uvažuje časová série finančních veličin bez skoků, potom lze využít Wienerův proces. Wienerův proces je určitým standardizovaným stochastickým procesem, jehož hodnota \tilde{z}_t má

normální normované rozdělení $\tilde{z}_t \sim N(0,1)$. Obrázek 3-1 ukazuje příkladové cesty Wienerova procesu.

Obrázek 3-1 Příklady Wienerova procesu



Sloučením obou komponent charakterizujících průběh úrokové sazby dostáváme:

$$dr_t = \alpha \cdot (\mu - r_t) \cdot dt + \sigma \cdot dz_t, \quad (3.4)$$

$$dz_t = \tilde{z}_t \cdot \sqrt{dt},$$

kde σ je volatilita úrokových sazeb

\tilde{z}_t je náhodná hodnota Wienerova procesu v čase t

Rovnice (3.4) je vyjádřením Ornstein-Uhlenbeckova procesu a byla použita jako výchozí předpoklad v prvním nearbitrážním modelu pro krátkodobou úrokovou sazbu, Vašíčkově modelu.

Nutno se pozastavit nad veličinou σ , která znázorňuje volatilitu úrokových sazeb. Hodnotu tohoto parametru lze zjistit dvojím způsobem:

- historicky z časových řad a
- odvozením (implied) z aktuálních tržních cen aktiv.

První, jednodušší verze stanovení hodnoty tohoto parametru spočívá ve stanovení volatility úrokových sazeb pomocí výpočtu směrodatné odchylky z historických časových řad úrokových sazeb:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_t [r_t - E(r_t)]^2} \quad (3.5)$$

Druhý přístup ve zjištění volatility je založen na tržním očekávání ohledně její budoucí hodnoty. Jedná se tedy o stanovení forwardové volatility. Volatilita úrokových sazeb může být např. rovněž určena z ceny opce, která je mimo jiné funkcí volatility a pokud je tato cena známa, potom lze volatilitu odvodit. Hodnotu volatility zjistíme řešením Black-Scholesovy rovnice pro cenu call opce následovně:

$$\text{cena opce} = S \cdot N \left(\frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot dt}{\sigma \cdot \sqrt{dt}} \right) - e^{-r \cdot dt} \cdot X \cdot N \left(\frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot dt}{\sigma \cdot \sqrt{dt}} - \sigma \cdot \sqrt{dt} \right). \quad (3.6)$$

Modely úrokových sazeb lze členit z různých hledisek. Nejjednodušeji se modely člení podle počtu faktorů, které daný model ovlivňují, tedy modely:

- jednofaktorové a
- vícefaktorové.

Jelikož vývoj úrokové sazby je základem a cílem pro oceňování různých derivátů citlivých na úrokové sazby, můžeme oceňovací modely těchto derivátů rozdělit na:

- affine yield models,
- whole yield curve models,
- market models,
- price kernel models,
- positive and log-r models,
- consol models,
- random field models a
- models with jump components.

Jednofaktorové modely

Jestliže zkoumáme vývoj krátkodobé úrokové sazby, která je ovlivňována sama sebou, potom lze nalézt všeobecnou formulaci, pomocí které lze zapsat konstrukci řady dalších modelů:

$$dr_t = (\theta(t) + c(t) \cdot r_t + b \cdot r_t^2) \cdot dt + \sigma(t) \cdot (r_t + d)^\gamma \cdot dz_t. \quad (3.7)$$

Ve velkém množství případů hodnota parametru b a d je rovna nule, parametr γ nabývá většinou hodnot 0, 1/2, 1. Běžnější verze rovnice (3.7) vypadá takto:

$$dr_t = (\theta(t) + c(t) \cdot r_t) \cdot dt + \sigma(t) \cdot r_t^\gamma \cdot dz_t. \quad (3.8)$$

Vašíčkův model

$$dr_t = \alpha \cdot (\mu - r_t) \cdot dt + \sigma \cdot dz_t. \quad (3.9)$$

Tento model patří k modelům dynamické úrokové sazby. Z rovnice je zřejmé, že patří k mean reversion modelům, tj. modelům, které jsou založeny na předpokladu, že vývoj krátkodobé úrokové sazby směřuje k hodnotě dlouhodobě rovnovážné úrokové sazby. Parametry α, μ, σ jsou konstantní. Nevýhodou modelu je, že úrokové sazby mohou dosahovat záporných hodnot. Tento problém řeší následující model.

Cox, Ingersoll and Ross model (CIR)

$$dr_t = \alpha \cdot (\mu - r_t) \cdot dt + \sigma \cdot \sqrt{r_t} \cdot dz_t. \quad (3.10)$$

Cílem tohoto modelu je zamezení výskytu záporných úrokových sazeb zavedením prvku $\sqrt{r_t}$. Rozdíl mezi Vašíčkovým model vyplývá z odlišného chápání volatility. Ve Vašíčkově modelu je volatilita konstantní, kdežto v modelu CIR volatilita se mění proporcionalně s $\sqrt{r_t}$.

Chan, Karolyi, Longstaff and Sanders model (CKLS)

$$dr_t = \alpha \cdot (\mu - r_t) \cdot dt + \sigma \cdot r_t^\gamma \cdot dz_t. \quad (3.11)$$

Tento model pracuje s konstantní rovnovážnou úrokovou sazbou μ , ale má flexibilnější (elastickou) funkci volatility.

Hull and White model (HW)

$$dr_t = (\theta(t) - a \cdot r_t) \cdot dt + \sigma \cdot dz_t, \quad \text{nebo} \quad (3.12)$$

$$dr_t = a \cdot \left(\frac{\theta(t)}{a} - r_t \right) \cdot dt + \sigma \cdot dz_t. \quad (3.13)$$

Jedná se o rozšířenou verzi Vašíčkova modelu. Funkce $\theta(t)$ je deterministickou funkcí času a je zvolena tak, aby respektovala časovou strukturu úrokových sazeb:

$$\theta(t) = \left. \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} \right|_t + a \cdot f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at}), \quad (3.14)$$

kde $f(0, t)$ je aktuální forwardová křivka.

HW model je využíván pro svoje jednoduché analytické vyjádření hodnot různých aktiv např. obligací nebo evropských opcí s obligací jako podkladovým aktivem. Stejně jako

Vašíčkův model umožňuje výskyt záporných úrokových sazeb. Avšak pro typické spotové křivky a parametry volatility je pravděpodobnost záporných úrokových sazeb velmi malá.

Jamshidian model (rozšířený CIR)

$$dr_t = \alpha \cdot (\theta(t) - r_t) \cdot dt + \sigma \cdot \sqrt{r_t} \cdot dz_t. \quad (3.15)$$

Jamshidian model je kombinací HW a CIR modelů. Tedy opět vychází z proměnlivé rovnovážné úrokové sazby $\theta(t)$, která má za cíl vhodně přizpůsobit aktuální časovou strukturu a také nedovoluje úrokovým sazbám dosáhnout záporných hodnot.

Ho and Lee model (HL)

$$dr_t = \theta(t) \cdot dt + \sigma \cdot dz_t. \quad (3.16)$$

Předchozí modely byly modely charakteru mean reversion. Tento model se skládá z deterministického, v čase se měnícího, pohybu úrokové sazby a z konstantní volatility. Funkce $\theta(t)$ je tady dána:

$$\theta(t) = \left. \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} \right|_t + \sigma^2 \cdot t. \quad (3.17)$$

Časová struktura volatility je zde dána paralelním posunem spotové výnosové křivky, jejíž veličina je nezávislá na čase a na úrokových sazbách.

Black, Derman and Toy model (BDT)

$$d \ln r_t = \theta(t) \cdot dt + \sigma \cdot dz_t. \quad (3.18)$$

Krátkodobá úroková sazba je exponenciální funkcí, což zaručuje její kladnou hodnotu. Aplikací Itovy Lemmy můžeme vztah (3.18) transformovat do podoby:

$$dr_t = \left[\theta(t) + \frac{1}{2} \sigma^2 \right] \cdot r_t \cdot dt + \sigma \cdot r_t \cdot dz_t. \quad (3.19)$$

V BDT modelu je volatilita spojena se intenzitou přibližovacího procesu k dlouhodobé rovnovážné úrokové sazbě takovým způsobem, že v obvyklé situaci, kdy dlouhodobé úrokové sazby jsou méně volatilnější než sazby krátkodobé, volatilita krátkodobých sazeb se zmenšuje. Tato situace je nepřijatelná, neboť nikdo nepředpokládá, že by krátkodobé sazby se

staly méně volatilnější než dlouhodobé sazby. Tento problém řeší následující BK model, kde rychlost přibližování a volatilita nejsou spojeny.

Black, Karasinski model (BK)

$$d \ln r_t = (\theta - a \cdot \ln r_t) \cdot dt + \sigma \cdot dz_t. \quad (3.20)$$

Jedná se o modifikaci BDT modelu, konstantní parametr θ zajišťuje vyrovnaní forwardových a spotových sazeb. Tento model podobně jako BDT model předpokládá, že volatilita je úměrná krátkodobé úrokové sazbě, tedy poměr volatility a úrokové sazby je konstantní. Pro tyto modely posun úrokové sazby není jednoduché stanovit, požadují numerické zabudování časové struktury do výchozí úrokové sazby a volatility, tedy forwardovou křivku jako funkci krátkodobé úrokové sazby nelze stanovit analyticky.

Rendelman and Barterův model

$$dr_t = m \cdot r_t \cdot dt + \sigma \cdot r_t \cdot dz_t. \quad (3.21)$$

Tento model se liší od ostatních hlavně tím, že se podobá modelům využívajícím Brownův geometrický proces, který je typický pro simulaci náhodného vývoje akcií. Průběh krátkodobé úrokové sazby respektuje logaritmicko-normální rozdělení, což dle empirických studií nebylo na reálných krátkodobých úrokových sazbách potvrzeno.

Vícefaktorové modely

Vícefaktorový model úrokových sazeb je případ, kdy krátkodobá úroková sazba je nejen ovlivňovaná sama sebou ale i dalším faktorem (faktory). Vztah dalšího faktoru k úrokové sazbě může být následující:

- vývoj r_t je nezávislý na dalších faktorech,
- vývoj r_t je závislý na dalších faktorech.

Longstaff and Schwartz dvoufaktorový model

Jedná se o známý dvoufaktorový model, který se vyznačuje velikou flexibilitou a dosahuje dobrého vyvážení mezi různými časovými strukturami. Model je popsán pomocí dvou faktorů x_t a y_t a jejich procesů takto:

$$\begin{aligned} dx_t &= (a - b \cdot x_t) \cdot dt + c \cdot \sqrt{x_t} \cdot dz_{1,t} \\ dy_t &= (d - e \cdot y_t) \cdot dt + f \cdot \sqrt{y_t} \cdot dz_{2,t} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Krátkodobá úroková sazba r_t je lineární funkcí x_t a y_t a vypadá následovně:

$$r_t = \alpha \cdot x_t + \beta \cdot y_t \quad (3.23)$$

$$dr_t = v_t \cdot dt \quad (3.24)$$

Volatilita úrokové sazby:

$$v_t = \alpha^2 \cdot x_t + \beta^2 \cdot y_t \quad (3.25)$$

Stavové proměnné x_t a y_t lze chápat jako komponenty výnosů trhu vztaženého či nevztaženého k tržní volatilitě.

Balduzzi, Das, Foresi and Sundaram třífaktorový model (BDFS)

Model je definován třemi procesy:

$$\begin{aligned} dr_t &= \kappa \cdot (\mu_t - r_t) \cdot dt + \sqrt{v_t} \cdot dz_{r,t} \\ d\mu_t &= \alpha \cdot (\beta - \mu_t) \cdot dt + \eta \cdot dz_{\mu,t} \\ dv_t &= a \cdot (b - v_t) \cdot dt + \omega \cdot \sqrt{v_t} \cdot dz_{v,t} \end{aligned} \quad (3.26)$$

kde r_t je krátkodobá úroková sazba, μ_t je jeho průměr a v_t jeho volatilita. Časová struktura tohoto modelu je velice flexibilní a může pracovat s nejrozmanitějšími druhy výnosových křivek.

3.2. Odhady parametrů vybraných modelů úrokových sazeb

Jedním ze základních důvodů, proč se vývoj úrokových sazeb modeluje, je ten, že model se snaží popsat chování úrokové sazby. Každý model se skládá z jednotlivých faktorů a jejich parametrů. Je třeba odhadnout tyto parametry tak, aby výsledný model do značné míry kopíroval skutečný vývoj úrokové sazby. K základním metodám, pomocí kterých jsou zjišťovány jednotlivé parametry, patří:

- metoda nejmenších čtverců (least squares method)
- metoda momentů (general method of moments, GMM)
- metoda maximální věrohodnosti (maximum likelihood, ML)

Jednotlivé metody budou popsány níže, vždy ve spojení s určitým modelem úrokové sazby.

Je nutno poznamenat, že každý vytvořený model musí být rovněž statisticky testován, aby bylo zjištěno, zda je vhodný pro danou časovou řadu jednotlivých úrokových sazeb.

Metoda nejmenších čtverců a Vašíčkův model

Předpokládá se časová řada krátkodobých úrokových sazeb r_t a Vašíčkův proces definovaný rovnicí:

$$dr_t = \alpha \cdot (\mu - r_t) \cdot dt + \sigma \cdot dz_t, \quad (3.27)$$

Pomocí Eulerovy diskretizace upravíme na tvar:

$$r_{t+1} = (1 - \alpha \cdot dt) \cdot r_t + \alpha \cdot \mu \cdot dt + \sigma \cdot \sqrt{dt} \cdot \varepsilon_t. \quad (3.28)$$

Zavedením substituce formulujeme:

$$r_{t+1} = a + b \cdot r_t + \eta_t, \quad (3.29)$$

kde η_t je šum, reziduální odchylka.

Z této rovnice je možné odhadovat parametry a a b pomocí regrese splněním podmínky:

$$\sum_t \eta_t^2 \rightarrow \min. \quad (3.30)$$

Původní parametry Vašíčkova modelu lze zpětně vypočítat:

$$\alpha = \frac{1-b}{dt}, \quad (3.31)$$

$$\mu = \frac{a}{1-b}. \quad (3.32)$$

Parametry a a b je nutno testovat na statistickou významnost. Přinejmenším je nutno testovat jednotlivé parametry pomocí t-testů.

Metoda momentů (GMM) a CKLS model

Na základě jednotlivých modelů úrokových sazeb lze říci, že vývoj úrokových sazeb závisí na souboru parametrů θ , například pro Vašíčkův model $\theta = (\alpha, \mu, \sigma)$. Princip tohoto přístupu tkví v tom, že je možné nalézt takové funkce $f_i(r_t, \theta)$, pro které platí:

$$E[f_i(r_t, \theta)] = 0. \quad (3.33)$$

V základní verzi této metody, počet funkcí f_i se rovná počtu odhadovaných parametrů.

Předpokládejme model úrokové sazby CKLS:

$$dr_t = \alpha \cdot (\mu - r_t) \cdot dt + \sigma \cdot r_t^\gamma \cdot dz_t. \quad (3.34)$$

Užitím Eulerovy diskretizace:

$$r_{t+1} = a + b \cdot r_t + \sigma \cdot r_t^\gamma \cdot u_{t+1}, \quad (3.35)$$

kde

$$\varepsilon_{t+1} = \sigma \cdot r_t^2 \cdot u_{t+1} = r_{t+1} - (a + b \cdot r_t), \quad (3.36)$$

$$\varepsilon_{t+1} \sim N(0, \sigma^2 \cdot r_t^{2\gamma} \cdot dt).$$

Odhadované parametry jsou $\theta = (a, b, \sigma, \gamma)$ a soubor funkcí f_i :

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (r_{t+1} - a - b \cdot r_t) \\ f_2 &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N ((r_{t+1} - a - b \cdot r_t)^2 - \sigma^2 \cdot r_t^{2\gamma} \cdot dt) \\ f_3 &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (r_{t+1} - a - b \cdot r_t) \cdot r_t, \\ f_4 &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N ((r_{t+1} - a - b \cdot r_t)^2 - \sigma^2 \cdot r_t^{2\gamma} \cdot dt) \cdot r_t \end{aligned} \quad (3.37)$$

Takto zvolené rovnice nám zajišťují, že $\varepsilon_{t+1} \sim N(0, \sigma^2 \cdot r_t^{2\gamma} \cdot dt)$, že ε_{t+1} nebudou autokorelovány a korelovány s r_t .

Cílem je určit parametry a, b, σ, γ tak, aby hodnota souboru funkcí f_i byla minimalizována:

$$J(a, b, \sigma, \gamma) = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 \rightarrow \min \quad (3.38)$$

Parametry α, μ se dopočítají opět podle rovnic (3.31) a (3.32).

Metoda maximální věrohodnosti a Vašíčkův model

Úkolem této metody je nalézt hodnoty parametrů modelu, pro které skutečný výsledek nastává s maximální pravděpodobností, je tedy modusem funkce hustoty pravděpodobnosti. Předpokládá se, že funkce hustoty pravděpodobnosti je u každého modelu známa. Metodu maximální věrohodnosti můžeme ukázat na Vašíčkově modelu v plné verzi a na modelu upraveném podle Eulerovy diskretizace.

- Vašíčkův proces krátkodobé úrokové sazby v plné verzi:

$$dr_t = \alpha \cdot (\mu - r_t) \cdot dt + \sigma \cdot dz_t \quad (3.39)$$

má následující rozdělení pravděpodobnosti:

$$p(t_2, r_{t_2}; t_1, r_{t_1} | \theta) \sim N\left(\mu + (r_{t_1} - \mu) \cdot e^{-\alpha \cdot dt}, \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha \cdot dt})\right)$$

kde $N(\mu, \sigma^2)$ je hustota pravděpodobnosti se střední hodnotou a rozptylem.

Funkce věrohodnosti L má pro normální rozdělení a pro N počet prvků tvar:

$$L = \left(2\pi \cdot \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha \cdot dt})\right)^{-\frac{N-1}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{r_{t_{i+1}} - (\mu + (r_{t_i} - \mu) \cdot e^{-\alpha \cdot dt})}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha \cdot dt})}}\right)^2\right) \rightarrow \max \quad (3.40)$$

Logaritmická verze rovnice:

$$\ln L = -\frac{N-1}{2} \cdot \ln\left(2\pi \cdot \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha \cdot dt})\right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{r_{t_{i+1}} - (\mu + (r_{t_i} - \mu) \cdot e^{-\alpha \cdot dt})}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha \cdot dt})}}\right)^2 \rightarrow \max \quad (3.41)$$

- Jestliže Vašíčkův proces zapíšeme pomocí Eulerovy diskretizace jako:

$$r_{t_{i+1}} = a + b \cdot r_t + \sigma \cdot \sqrt{dt} \cdot \varepsilon_t, \quad (3.42)$$

$$\varepsilon_t = \frac{r_{t_{i+1}} - (a + b \cdot r_t)}{\sigma \cdot \sqrt{dt}} \sim N(0,1),$$

potom funkce věrohodnosti má tvar:

$$L = (2\pi \cdot \sigma^2 \cdot dt)^{-\frac{N-1}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{r_{t_{i+1}} - (a + b \cdot r_t)}{\sigma \cdot \sqrt{dt}}\right)^2\right) \rightarrow \max, \quad (3.43)$$

$$\ln L = -\frac{N-1}{2} \cdot \ln(2\pi \cdot \sigma^2 \cdot dt) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{r_{t_{i+1}} - (a + b \cdot r_t)}{\sigma \cdot \sqrt{dt}}\right)^2 \rightarrow \max. \quad (3.44)$$

Z rovnice (3.44) je zřejmé, že pokud hodnota $\ln L$ má být maximalizována, potom výraz

$$\sum_i (r_{t_{i+1}} - (a + b \cdot r_t))^2 \quad (3.45)$$

musí být minimalizován. Tento případ vede ke stejnému výsledku jako metoda nejmenších čtverců (rovnice (3.29) a (3.30)).

3.3. Odhady volatility

Všeobecně lze říci, že volatilita (nestálost) určité veličiny měří intenzitu náhody. Je typicky kvantifikována pomocí směrodatné odchylky nebo rozptylu. Neexistuje jednoznačná nejlepší metoda jak měřit volatilitu. Záleží na tom, k čemu se bude vypočtená hodnota používat. V současnosti vzniká silná potřeba modelovat a předpovídat volatilitu, neboť bylo dokázáno, že ve finančních časových řadách volatilita není konstantní, ale se v čase mění. Mezi nejvíce používané metody měření volatility patří ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity) a GARCH modely (Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity).

Model ARCH(q)

Definuje volatilitu takto:

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + a_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + a_q \varepsilon_{t-q}^2, \quad (3.46)$$

kde $a_0 > 0$; $a_i > 0$ pro $i = 1, 2, \dots, q$; $a_1 > a_2 > \dots > a_q$

$$\sum_{i=1}^q a_i < 1,$$

ε_t^2 náhodný šum v obdobích od $t-1$ až po $t-q$.

Rovnice (3.46) říká, že předpokládaná volatilita v čase t závisí na realizacích náhodného šumu (odchylek) v minulých obdobích jejichž váhami jsou parametry a_i . Volatilita v běžném období je vysoká (nízká) pokud minulé šoky byly velké (malé) a šoky z méně vzdálené minulosti mají větší dopad na volatilitu než šoky, které se uskutečnily ve více vzdálené minulosti.

Nedostatkem modelu ARCH je potřeba velkých hodnot q , tzn. velkého počtu minulých období, což je spojeno s problémem odhadu. Tento problém řeší zobecněný model ARCH neboli GARCH(p,q)

Model GARCH(p,q)

Je definován:

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j \sigma_{t-j}^2, \quad (3.47)$$

kde $a_0 > 0$; $a_i > 0$ pro $i = 1, 2, \dots, q$; $b_j > 0$ pro $j = 1, 2, \dots, p$.

Predikovaný rozptyl tedy závisí na konstantě a_0 , minulých rozptylech ε_{t-i}^2 a minulých chybách v předpovědi σ_{t-i}^2 .

GARCH(1,1) pro jedno období vypadá následovně:

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + b_1 \sigma_{t-1}^2 \quad (3.48)$$

V modelu GARCH lze rovněž najít koncept „mean reversion“ procesu ve volatilitě:

$$\sigma_t^2 = \omega + a_1(\varepsilon_{t-1}^2 - \omega) + b_1(\sigma_{t-1}^2 - \omega) \quad (3.49)$$

kde $\omega = \frac{a_0}{1 - a_1 - b_1}$, $(a_1 + b_1) < 1$

Pokud parametry a_1 a b_1 jsou kladné, rovnice říká, že když je volatilita nad (pod) svým dlouhodobým průměrem ω v čase $t-1$, v následujícím období t bude volatilita směřovat směrem dolů (nahoru) k hodnotě ω . Rychlost přibližování závisí na parametrech a_1 a b_1 . Všeobecně řečeno, čím více se hodnota $(a_1 + b_1)$ blíží k 1, tím déle se bude volatilita přibližovat ke své dlouhodobé střední hodnotě.

GARCH pro více období je možné stanovit rekurentním dosazováním z predikce na jedno období, přitom počítáme, že neznámý skutečný rozptyl je nahrazen jeho očekávanou hodnotou $E(\varepsilon_t^2) = \sigma_{t+1}^2$. GARCH pro:

- jedno období $\sigma_t^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + b_1 \sigma_{t-1}^2$, (3.50)

- dvě období $\sigma_{t+1}^2 = a_0(1 + (a_1 + b_1)) + (a_1 + b_1)(a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + b_1 \sigma_{t-1}^2)$, (3.51)

- tři období $\sigma_{t+2}^2 = a_0(1 + (a_1 + b_1) + (a_1 + b_1)^2) + (a_1 + b_1)^2 \cdot (a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + b_1 \sigma_{t-1}^2)$. (3.52)

Pro odhad parametrů modelu GARCH je vhodné použít metodu maximální věrohodnosti, jejíž logaritmičká verze je:

$$\ln L = -\frac{n}{2} \ln 2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \ln \sigma_t^2 - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} \rightarrow \max \quad (3.53)$$

GARCH model je oblíben nejen pro svoji jednoduchost, ale také proto, protože je zevšeobecněním dalších modelů na měření volatility. Nutno říci, že model GARCH s počtem parametrů $p, q < 2$ dosahuje dobrých výsledků.

Existuje nespočetně mnoho rozšířených verzí modelu GARCH, které se snaží o vysvětlení dalších závislostí ve volatilitě. Zejména se jedná o autokorelaci, kladnost σ_t^2 , asymetrický efekt atd. v modelech AARCH, QARCH, log-ARCH, NARCH, E-GARCH, I-GARCH, GARCH-M, GJR-GARCH.

Speciálním případem modelu GARCH je model **EWMA** (Exponential Weighted Moving Average), kdy se odhaduje pouze jeden parametr λ (označovaný jako tlumící faktor), tak že:

$$\sigma_t^2 = (1 - \lambda) \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \lambda \cdot \sigma_{t-1}^2, \quad (3.54)$$

za podmínky $0 \leq \lambda < 1$.

Model krátkodobé úrokové sazby jako GARCH model

Proces krátkodobé úrokové sazby zapíšeme pomocí rovnice:

$$r_t - r_{t-1} = \alpha_0 - \alpha_1 r_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (3.55)$$

Z rovnice je zřejmé, že změna úrokové sazby je rovna lineární funkci minulé úrokové sazby s kladnými parametry α_0, α_1 a náhodného šumu ε_t , jehož očekávaná hodnota je 0 a předpokládaný rozptyl σ_t^2 , který je kladný a mění se v čase. O proměnné, která má rozptyl měnící se v čase, říkáme, že je heteroskedasticidní. Pokud se rovnice přepíše do tvaru:

$$r_t - r_{t-1} = -\alpha_1 \left(r_{t-1} - \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \right) + \varepsilon_t, \quad (3.56)$$

potom, za předpokladu, že α_0/α_1 a α_1 jsou kladné, rovnice ukazuje, že jestliže je r_{t-1} nad (pod) svým průměrem, tak očekáváme snížení (zvýšení) r_t . Tedy předpokládá se, že vývoj úrokové sazby respektuje návrat k dlouhodobým hodnotám (mean reversion).

Model GARCH(1,1) se definuje:

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + b_1 \sigma_{t-1}^2 \quad (3.57)$$

kde

$$\varepsilon_t = r_t - (1 - \alpha_1) \cdot r_{t-1} - \alpha_0$$

Odhadované parametry $\alpha_0, \alpha_1, a_0, a_1, b_1$ se zjistí využitím metody maximální věrohodnosti dle rovnice (3.53).

3.4. Analýza hlavních komponent (Principal Components Analysis, PCA)

Jak již bylo řečeno, úrokové sazby s odlišnou dobou splatnosti jsou různě volatilní avšak vysoce korelované tzn. že se vyvíjejí podobně. Tento fakt lze vyjádřit jiným,

stručnějším způsobem než je korelační či kovarianční matice. Jedná se o analýzu hlavních komponent, která pracuje s odvozenými neměřitelnými veličinami – komponentami.

Příčinou vzniku této analýzy byla otázka, zda je možné nahradit několik rizikových veličin jedinou veličinou bez jakékoliv ztráty informace. Tato otázka byla vyřešena K. Pearsonem (1901), který se zabýval popisnou statistikou sloužící k redukci vícerozměrných dat.

Cílem analýzy hlavních komponent v oblasti úrokových sazeb je analyzovat strukturu volatility těchto sazeb. Metodika této analýzy spočívá v nahrazení korelovaných úrokových sazeb R_j novými, nekorelovanými veličinami – komponentami Z_j , které lze vyjádřit jako lineární kombinace původních úrokových sazeb:

$$Z_j = p_{1,j} \cdot R_1 + p_{2,j} \cdot R_2 + \dots + p_{N,j} \cdot R_N = \sum_i p_{i,j} \cdot R_i \quad (3.58)$$

Obecně lze říct, že kolik je úrokových sazeb s různou dobou splatnosti, tolik je komponent, tedy $i = j = 1, \dots, k$. Významnost jednotlivých komponent je určována podle jejich rozptylů. Jestliže komponenta Z_j má výběrový rozptyl λ_j , potom pořadí významnosti se určí podle kritéria $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k$. Podíl λ_j a $\sum \lambda_j$ znamená procentní podíl λ_j na hodnotě celkového rozptylu.

Každá komponenta Z_j je tak popsána vlastním (charakteristickým) číslem (eigenvalue) neboli výběrovým rozptylem λ_j a sérií jednotlivých parametrů $p_{1,j}, \dots, p_{k,j}$ tvořících vlastní (charakteristický) vektor (eigenvector).

Matematický aparát PCA

Předpokládá se série časových řad úrokových sazeb r_{t_i} s rozdílnou dobou do splatnosti τ_j , tzn. $r_{t_i}(\tau_j)$,

kde

$$i = 1, \dots, n + 1$$

$$j = 1, \dots, k$$

Proces stanovení hlavních komponent lze rozdělit do několika kroků:

– stanovení diferencí $d_{i,j} = r_{t_{i+1}}(\tau_j) - r_{t_i}(\tau_j)$,

- z hodnot $d_{i,j}$ se vytvoří kovarianční (korelační) matice Σ ,
- nalezení takové matice P s prvky $p_{i,j}$ tak, aby výsledkem součinu matic $P \cdot \Sigma \cdot P^{-1}$ byla diagonální matice, tedy:

$$P \cdot \Sigma \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_k \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

při splnění podmínky: $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k$.

Interpretace jednotlivých komponent

Z řady empirických studií, viz Fabozzi (1997), bylo zjištěno, že první tři komponenty vysvětlují přes 95% celkového rozptylu. Tabulka 3-1 ukazuje kumulativní procentní podíl prvních tří komponent na celkovém rozptylu ve vybraných zemích. Je tady zřejmé ono zjednodušení. Pokud jsme dříve analyzovali např. vývoj 10-ti různých úrokových sazeb, teď nám k tomu stačí první tři komponenty. To je užitečné zejména při správě tržního rizika.

Tabulka 3-1 Procentní podíl prvních tří komponent na celkovém rozptylu ve vybraných zemích

Země	%-ní podíl
Francie	97,10
Itálie	94,15
Japonsko	95,40
Kanada	95,65
Německo	96,05
Spojené Království	97,21
USA	98,60

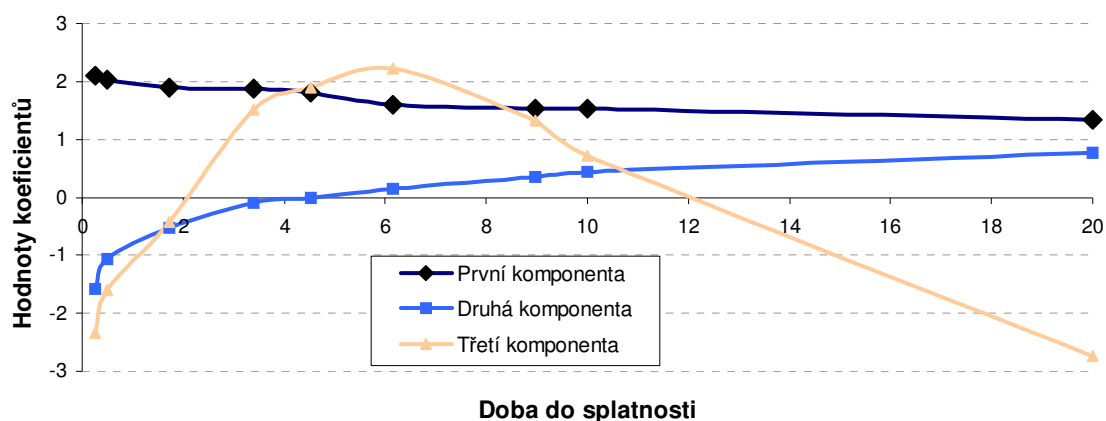
Bylo empiricky dokázáno, že **první komponenta** se chová jako paralelní posun (shift). To znamená, že tato komponenta reprezentuje skutečnost, že všechny úrokové sazby se pohybují ve stejném směru. Tvar křivky tohoto faktoru je většinou plochý, někdy bývá klesající s rostoucí dobou do splatnosti, což dokládá fakt, že krátkodobé sazby jsou volatilnější. První komponenta má rovněž největší vypovídací schopnost ze všech.

Druhá komponenta charakterizuje zakroucení v časové struktuře (twist) a odráží, že krátkodobé a dlouhodobé sazby se pohybují v protisměru. Rozhoduje o tom, zda výnosová křivka je strmá či plochá.

Třetí komponenta bývá označována jako motýl (butterfly). Představuje fakt, že krátkodobé a dlouhodobé sazby se vyvíjejí v opačném směru než sazby střednědobé.

Obrázek 3-2 znázorňuje příkladné křivky prvních tří komponent závislých do doby do splatnosti původních úrokových sazeb.

Obrázek 3-2 Příkladové křivky prvních komponent



Analýza hlavních komponent se nemusí vždy jevit jako vhodný způsob pro shrnutí dat. Záleží na tom, kolik procent z celkového rozptylu je vysvětleno prvními komponenty. Pokud několik prvních komponent vysvětluje většinu rozptylu, potom tato analýza je účinná. To záleží na korelaci mezi výchozími úrokovými sazbami. V případě vysoké korelace první komponenty vysvětlují většinu celkového rozptylu, v případě nízké korelace tomu tak není.

4. Ověření vybraných modelů úrokových sazeb

4.1. Výnosová křivka v ČR

Pro výpočet výnosové křivky je nutné použít obligace stejného druhu. Tradiční homogenní skupinu představují státní obligace, které jsou zobecněním nejmenšího rizika za nejnižší výnos. Výnosová křivka vytvořená ze státních obligací je tedy základní výnosovou křivkou v zemi. Tabulka 4-1 ukazuje 12 státních obligací s různou dobou do splatnosti. Aktuální tržní ceny se vztahují ke dni 12. 2. 2004 a výsledná křivka bude také vztažena k tomuto dni.

Tabulka 4-1 Základní charakteristiky jednotlivých státních obligací

Název státního dluhopisu	Nominální hodnota	Aktuální tržní cena	Kupón v %	Doba splatnosti
ST.DLUHOP. 7,30/04	10 000	102,27	7,30	06.08.2004
ST.DLUHOP. 6,05/04	10 000	102,10	6,05	14.09.2004
ST.DLUHOP. 6,75/05	10 000	104,24	6,75	18.02.2005
ST.DLUHOP. 3,00/06	10 000	100,14	3,00	20.01.2006
ST.DLUHOP. 5,70/06	10 000	106,32	5,70	26.10.2006
ST.DLUHOP. 6,30/07	10 000	108,36	6,30	17.03.2007
ST.DLUHOP. 2,90/08	10 000	96,61	2,90	17.03.2008
ST.DLUHOP. 6,40/10	10 000	112,01	6,40	14.04.2010
ST.DLUHOP. 6,55/11	10 000	112,87	6,55	05.10.2011
ST.DLUHOP. 3,70/13	10 000	91,55	3,70	16.06.2013
ST.DLUHOP. 6,95/16	10 000	117,04	6,95	26.01.2016
ST.DLUHOP. 4,60/18	10 000	93,34	4,60	18.08.2018

Bude počítána výnosová křivka představující závislost výnosu do splatnosti (YTM) na době do splatnosti. Dle rovnice:

$$TCO = \sum_t CF_t (1 + y)^{-t}$$

je nutno vypočítat výnos do splatnosti y , který je naší neznámou. CF_t představují peněžní toky v jednotlivých letech, tzn. kupónové platby v každém roku a nominální hodnotu v době dospělosti obligace. Tržní cena obligace je hrubou cenou obligace zahrnující čistou cenu obligace (kurz obligace) a alikvótní úrokový výnos, tedy:

$$TCO = kurz \cdot \frac{NH}{100} + AÚV$$

Výsledná rovnice, ze které je počítán YTM vypadá následovně:

$$kurz \cdot \frac{NH}{100} + AÚV = \sum_{i=1}^{T-1} \frac{K_i}{(1+y)^i} + \frac{K_T + NH}{(1+y)^T}$$

Výnos do splatnosti státního dluhopisu 5,70/06 se vypočte:

$$106,32 \cdot \frac{10000}{100} + 570 \cdot \frac{254}{360} = \frac{570}{(1+y)^{254/360}} + \frac{570}{(1+y)^{1+254/360}} + \frac{570+10000}{(1+y)^{2+254/360}}$$

U státních dluhopisů se předpokládá výplata kupónů jedno za rok. Pro výpočet neznámé y se použije program Řešitel aplikace MS EXCEL.

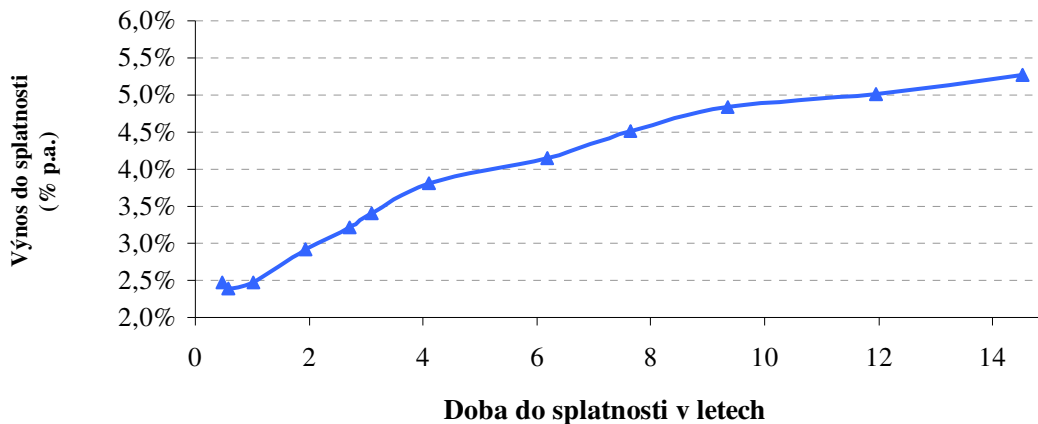
Tento postup se použije pro každou další státní obligaci. Výsledné výnosy do splatnosti a jejich doby do splatnosti ukazuje tabulka 4-2.

Tabulka 4-2 Výnosy do splatnosti jednotlivých státních obligací

Název státního dluhopisu	Doba do splatnosti (v letech)	Výnos do splatnosti	Doba splatnosti
ST.DLUHOP. 7,30/04	0,48	2,47%	06.08.2004
ST.DLUHOP. 6,05/04	0,59	2,39%	14.09.2004
ST.DLUHOP. 6,75/05	1,02	2,47%	18.02.2005
ST.DLUHOP. 3,00/06	1,94	2,92%	20.01.2006
ST.DLUHOP. 5,70/06	2,71	3,22%	26.10.2006
ST.DLUHOP. 6,30/07	3,10	3,41%	17.03.2007
ST.DLUHOP. 2,90/08	4,10	3,81%	17.03.2008
ST.DLUHOP. 6,40/10	6,17	4,15%	14.04.2010
ST.DLUHOP. 6,55/11	7,65	4,52%	05.10.2011
ST.DLUHOP. 3,70/13	9,34	4,84%	16.06.2013
ST.DLUHOP. 6,95/16	11,96	5,02%	26.01.2016
ST.DLUHOP. 4,60/18	14,52	5,26%	18.08.2018

Výnosovou křivku státních obligací sestavenou ke dni 12.2.2004 představuje graf 4-1.

Graf 4-1 Výnosová křivka státních obligací sestavená ke dni 12. 2. 2004



Výsledná výnosová křivka byla vyhlazena dle postupu uvedeného v kapitole 2.8. Hladká křivka byla stanovena tak, že byly zjištěny vyhlazené hodnoty úrokových sazeb pro každý den doby do splatnosti v období patnácti let (tj. 5400 pozorování). Kvůli velkému počtu dat byl místo programu MS EXCEL vytvořen program, jehož algoritmus, viz Adams (1993), je popsán v příloze č. 1.

Užitím vytvořeného programu na vyhlazování výnosových křivek byly rovněž zjištěny hodnoty výnosů do splatnosti s celočíselnými ročními dobami do splatnosti, tj. výnosy s dobou splatnosti 1, 2, 3,...14 let. Tyto výnosy byly použity pro kalkulaci jednorocní forwardové sazby dle vztahu:

$$f_t = \left[\frac{(1 + r_t)^t}{(1 + r_{t-1})^{t-1}} \right] - 1$$

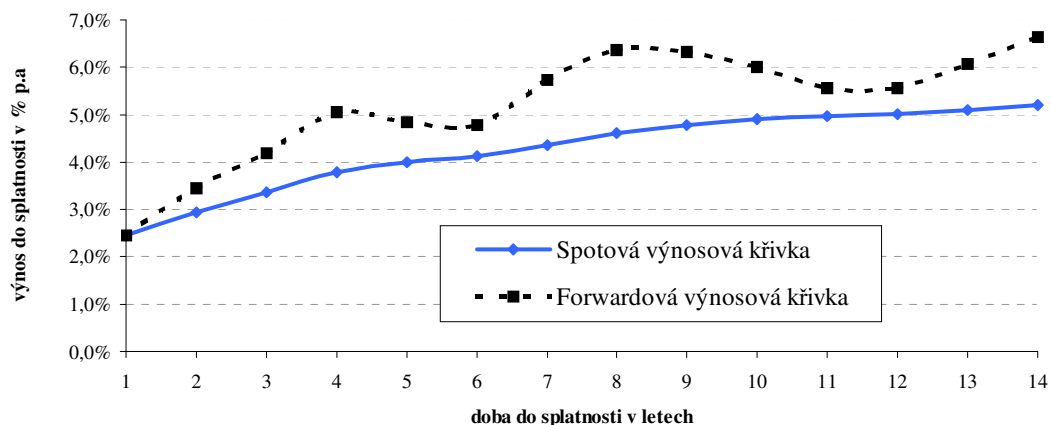
Tabulka 4-3 představuje spotové a jednorocní forwardové sazby a graf 4-2 jejich grafické zobrazení. Například spotová sazba 4,0% udává průměrný roční výnos při jednorocním úročení za 5 let, forwardová sazba 4,8% znamená průměrný roční výnos v budoucnu od konce roku 4 do konce roku 5.

Tabulka 4-3 Jednorocní spotové a forwardové úrokové sazby

	Doba do splatnosti v letech													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Spot. ÚS	2,5%	3,0%	3,4%	3,8%	4,0%	4,1%	4,4%	4,6%	4,8%	4,9%	5,0%	5,0%	5,1%	5,2%
Forw. ÚS	2,5%	3,4%	4,2%	5,1%	4,8%	4,8%	5,7%	6,4%	6,3%	6,0%	5,6%	5,6%	6,1%	6,7%

Z grafu 4-2 je možné rovněž přehledně vidět, že spotové a forwardové výnosové křivky se chovají jako průměrné a marginální veličiny. Zatímco v období let 4-6 spotové sazby rostou s klesajícím tempem, forwardové sazby klesají.

Graf 4-2 Spotová a forwardová výnosová křivka



Výnosovou křivku je možné sestavit i z jiných výnosů např. promptních, které respektují vztah (2.12):

$$TCO = \sum_{i=t_1}^{t_s-1} \frac{K}{(1+r_i)^i} + \frac{K + NH}{(1+r_{t_s})^{t_s}},$$

tedy každoroční cash flow z obligací je diskontován jinou úrokovou sazbou. Výpočet se provádí následovně. Nejprve se vypočte výnos do splatnosti jednoleté, nejlépe diskontované obligace. Poté se tento výnos dosadí do dvouleté obligace, kde neznámou je pouze spotový výnos $oy_{0,2}$. Zjištěné dva spotové výnosy se pak dosadí do tříleté obligace, vypočte se spotový výnos $oy_{0,3}$ atd. Tato metoda stanovení výnosu je zvaná bootstrapping, viz Fabozzi (2000).

Stanovení promptních výnosů tímto způsobem znamená v podmínkách ČR problém, neboť jsme omezeni počtem státních obligací s nekontinuálními dobami do splatnosti. Existují obligace s dobou do splatnosti čtyř nebo šesti let, avšak chybí obligace s pětiletou dobou dospělosti. Možným řešením je lineární nebo exponenciální interpolace, ale toto řešení může přinést zkreslené či nepřesné výsledky.

4.2. Odhad parametrů vybraných modelů úrokových sazeb

V této části budou ověřeny vybrané modely úrokových sazeb. Obecná metodika postupu byla popsána v kapitole 3.2. Neexistují modely, které by byly schopny modelovat úrokové sazby jakéhokoli druhu, proto se v této kapitole budou odhadovat parametry vybraných modelů úrokových sazeb v závislosti na jednotlivých typech vstupních dat. Vstupní data budou reprezentovat skupiny úrokových sazeb¹ s odlišnou charakteristikou. Byly vybrány soubory úrokových sazeb:

- českých, britských a amerických (teritoriální hledisko),
- dle různé doby do splatnosti (časové hledisko),
- velkého resp. malého rozsahu,
- se skokem (šokem) resp. bez skoku.

Vašíčkův model, CIR model a metoda nejmenších čtverců

Úroková sazba je funkcí minulé úrokové sazby, tedy:

$$r_{t+1} = a + b \cdot r_t + \eta_t.$$

Hledáme parametry a , b s použitím účelové funkce:

$$UF = \sum_t \eta_t^2 \rightarrow \min.$$

Parametry Vašíčkova a CIR modelu (α, μ) jsou dopočteny použitím rovnic (3.31) a (3.32) a posléze použity v rovnicích (3.9) a (3.10)

Pro metodu nejmenších čtverců byl použit program EXCEL, modul REGRESE, který je součástí doplňku ANALÝZA DAT.

Příklad A

Vstupní data tvoří měsíční průměry úrokové sazby 1M PRIBOR, období XII.97 - IX.03. Celkem 70 pozorování, bez skoku (šokového zvýšení úrokových sazeb).

Výstupem je tabulka 4-4 a graf 4-3. Výskyt hvězdičky * u parametrů a či b znamená, že tento parametr je na hladině významnosti 5% statisticky významný.

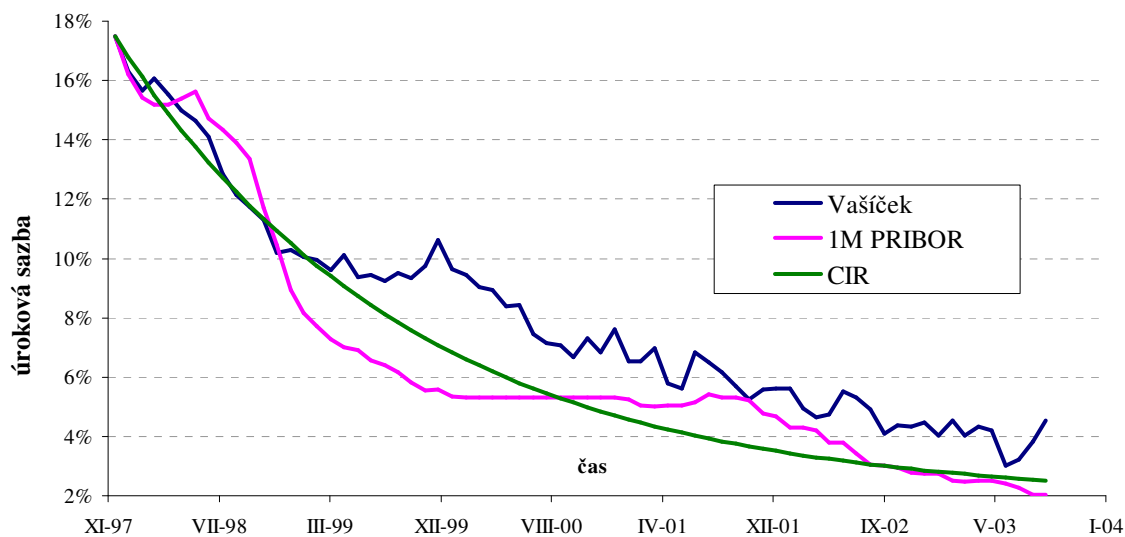
¹ Všechny úrokové sazby jsou přepočítány a vyjádřeny v % p. a.

Tabulka 4-4 Odhadnuté parametry modelů s použitím metody nejmenších čtverců

Parametr	Příklad A	Příklad B	Příklad C	Příklad E	Příklad F
a	0,000857	0,005632	0,000036	0,00126*	0,00205*
b	0,953477*	0,964662*	0,997895*	0,86409*	0,94360*
α	3,256628	4,699955	3,081405	13,5914	5,6399
μ	1,842%	15,937%	1,720%	0,928%	3,637%

* statisticky významné na 5% hladině významnosti

Graf 4-3 Vašíček, CIR a 1M PRIBOR

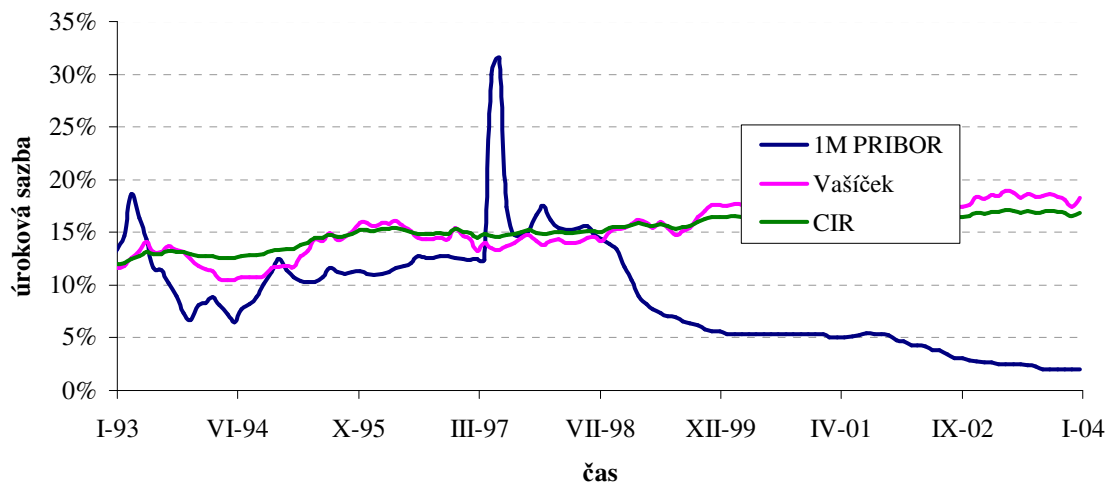


Příklad B

Vstupní data tvoří měsíční průměry úrokové sazby 1M PRIBOR, období I.93 - IX.03. Celkem 133 pozorování, se skokem (měnová krize v ČR v roce 1997).

Výstupem je tabulka 4-4 a graf 4-4.

Graf 4-4 Vašíček, CIR a 1M PRIBOR se skokem

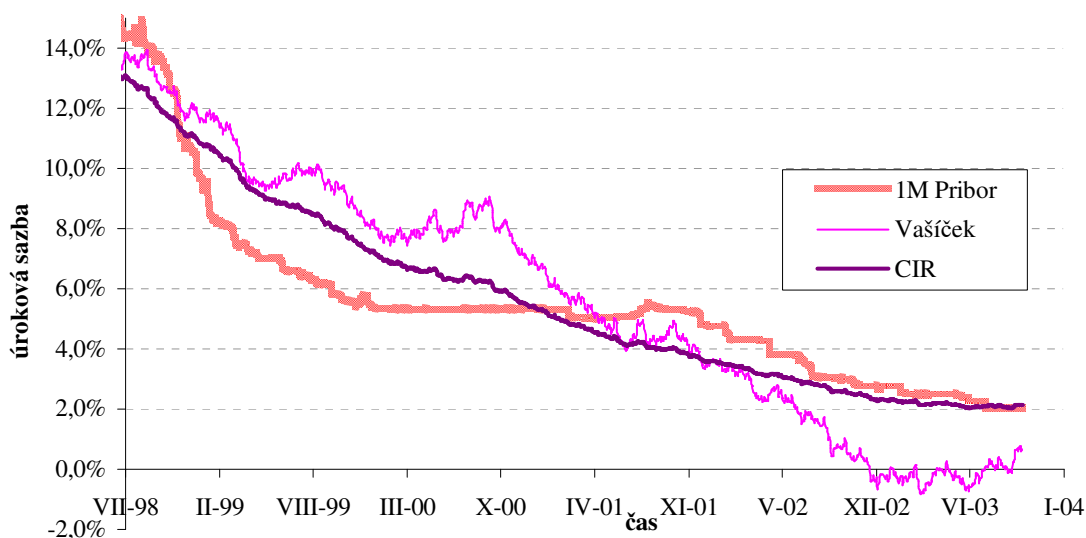


Z příkladů A a B je vidět, že Vašíčkův a CIR model nepracují se šoky, což dokládají příslušné grafy. Regrese rovněž nepočítá se šoky, jejím cílem je najít „zlatou střední cestu“ mezi jednotlivými změnami úrokové sazby. Na grafech je rovněž patrný rozdíl mezi Vašíčkovým a CIR modelem. Zatímco Vašíčkův model je volatilnější, CIR model si volatilitu hlídá, úroková sazba se tak nemůže dostat do záporných hodnot. Sklon křivky CIR modelu klesá, pokud se úroková sazba blíží k 0, čímž připomíná hyperbolu (graf 4-3).

Příklad C

Vstupní data tvoří denní kurzy úrokové sazby 1M PRIBOR, období 2. 1. 98 – 17. 10. 03. Celkem 1464 pozorování. Výstupem je tabulka 4-4 a graf 4-5.

Graf 4-5 Vašíček, CIR a denní 1M PRIBOR

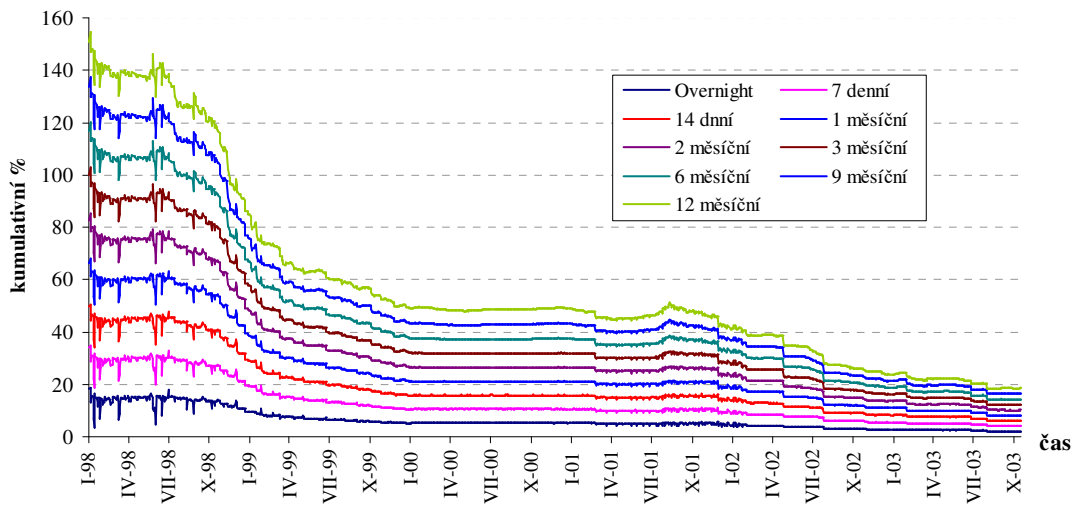


Příklad je identický s příkladem A až na to, že pracuje s denními sazbami 1M PRIBOR. Na parametry Vašíčkova a CIR modelu to však nemá podstatný vliv (tabulka 4-4). Vašíčkův model se na přelomu let 02/03 dostal do záporných hodnot, kdežto v příkladu A byly hodnoty ještě kladné. To je způsobeno délkou kroku, tedy inverzní hodnotou počtu pozorování.

Příklad D

V úvodu bylo avizováno, že budou zkoumány rovněž modely s úrokovými sazbami, které se liší dobou do splatnosti. Jelikož Vašíčkův a CIR model jsou modely krátkodobé úrokové sazby, přicházejí v úvahu úrokové sazby se splatností do jednoho roku. Jak je zřejmé z grafu 4-6 představující sazby PRIBOR se splatností od 1 dne po 1 rok, tyto úrokové sazby se vyvíjejí stejně, jsou vysoce korelovány, takže není důvod je odlišně zkoumat. Je jedno jakou úrokovou sazbu pro modely zvolíme, ani mírně odlišná volatilita nehraje podstatnou roli.

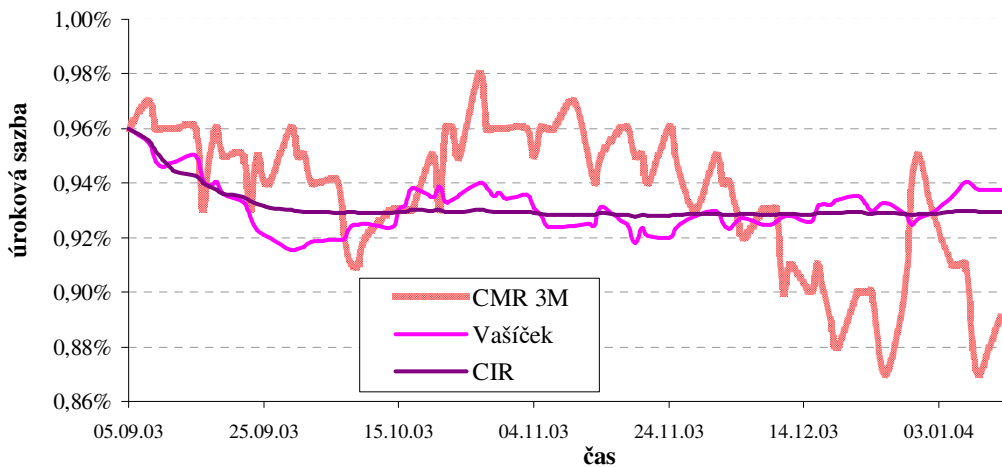
Graf 4-6 Vývoj PRIBORu v čase



Příklad E

Vstupní data tvoří denní americké úrokové sazby Constant Maturity Rate se splatností 3 měsíce, období 5. 9. 03 – 30. 1. 04. Celkem 100 pozorování. Výstupem je tabulka 4-4 a graf 4-7.

Graf 4-7 Vašíček, CIR a denní 3M CMR

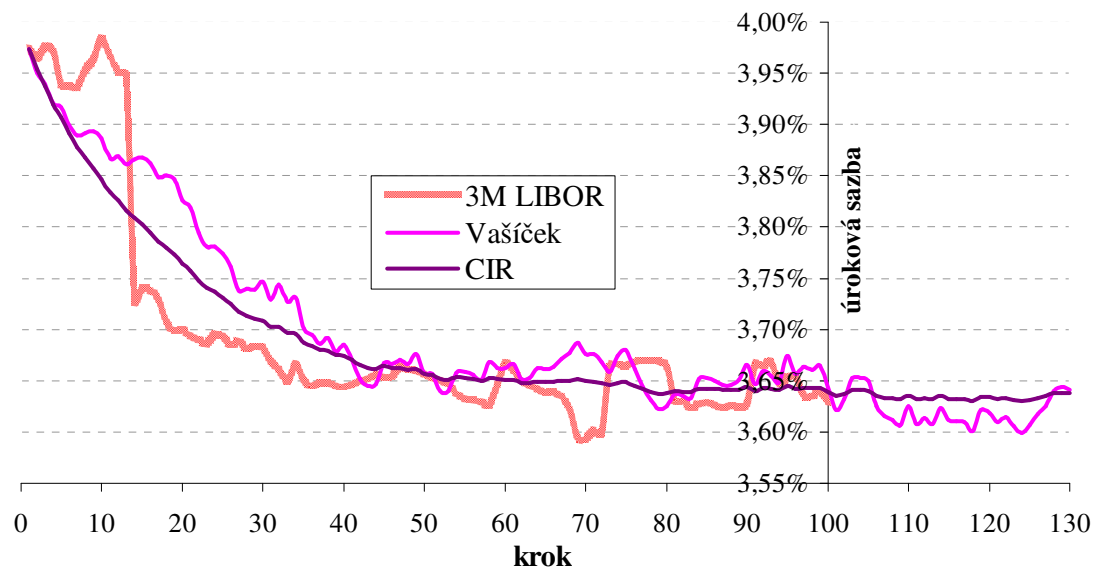


Metodou nejmenších čtverců byla nalezena dlouhodobě rovnovážná úroková sazba. Volatilita Vašíčkova a CIR modelu může být posléze určena historicky z časových řad.

Příklad F

Vstupní data tvoří denní kurzy 3-měsíční sazby LIBOR v GBP, období 21. 1. 03 – 19. 6. 03. Celkem 100 pozorování. Výstupem je tabulka 4-4 a graf 4-8.

Graf 4-8 Vašíček, CIR a 3M LIBOR (odhad parametrů modelu + predikce úrokové sazby)



Parametry obou modelů byly odhadnuty z časové řady s délkou 100 pozorování. Následně byly tyto parametry použity k predikci úrokové sazby pro dalších 30 období (dnů).

Metoda nejmenších čtverců – shrnutí

Z výše uvedených příkladů lze usoudit, že k predikci úrokových sazeb se více hodí malý počet pozorování (eliminace šoků), neboť se předpokládá, že úrokové sazby budou respektovat nastolený trend. Odhad parametrů z dlouhé časové řady je rovněž nepřijatelný, neboť odchylky modelů od skutečného vývoje mohou být značně veliké, výjimkou není ani 5%-ní úroková diference. U krátké časové řady se odchylky pohybují kolem 0,1%.

Vašíčkův model, na rozdíl od CIR modelu, je vhodný pro volatilní vývoj úrokové sazby. To, že Vašíčkův model není schopen dostatečně kopírovat volatilitu úrokové sazby, je způsobeno použitím metody nejmenších čtverců, která stanovuje odhady parametrů při minimalizaci volatility modelu. U Vašíčkova modelu nás nesmí překvapit i možnost

záporných úrokových sazeb. Model CIR se hodí pro modelování denních změn úrokových sazeb, které se příliš nemění a jejich výše se pohybuje těsně nad 0.

Model GARCH (1,1) a metoda maximální věrohodnosti

V této kapitole budeme odhadovat parametry modelu GARCH pro jedno období (a_0, a_1, b_1) s cílem predikovat volatilitu úrokových sazeb. Změna úrokové sazby je definována Vašíčkovým, respektive CIR procesem (parametry α_0, α_1). Tyto parametry jsou poté dosazeny do rovnic (3.31) a (3.32) a vypočteny parametry rychlosti přibližování k a rovnovážné úrokové sazby μ . Problematika a metodika výpočtu byla popsána v kapitolách (3.3.2.) a (3.3.3.). K výpočtům byl použit doplněk Řešitel programu MS EXCEL.

Příklad G

Vstupní data tvoří měsíční kurzy 6M CMR, období XII.00 – I.04. Celkem 38 pozorování. Výstupem jsou hodnoty v tabulce 4-5 a grafy 4-9 pro model GARCH a 4-10 pro model úrokové sazby. Hvězdička * u parametrů $a_0, a_1, b_1, \alpha_0, \alpha_1$ v tabulce znamená, že tyto parametry jsou na hladině významnosti 5% statisticky významné.

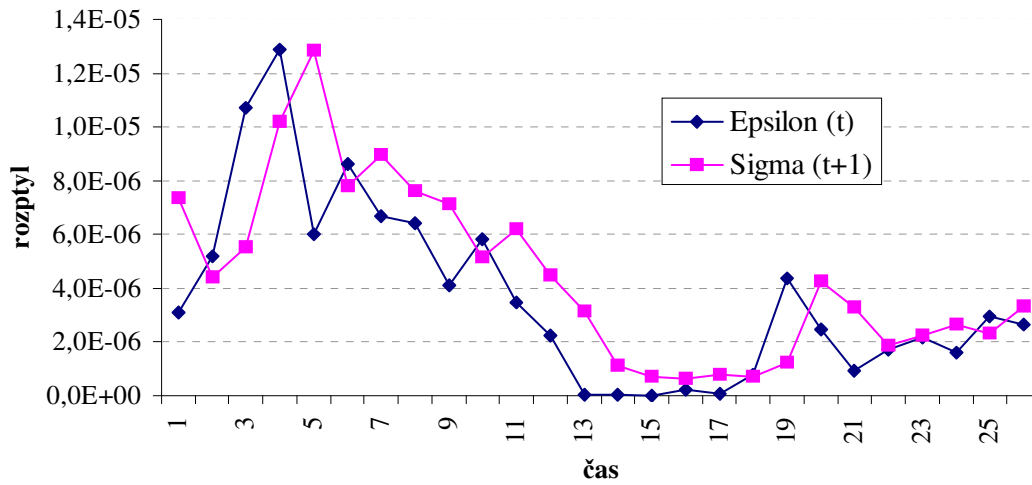
V grafu 4-9 je možné vidět chování skutečné volatility úrokových sazeb ε_t^2 a predikované volatility na jedno období σ_{t+1}^2 . Predikovaná volatilita se přibližuje ke skutečné volatilitě v jednotlivých krocích. Jestliže v čase (t) byla σ_{t+1}^2 vyšší než ε_t^2 , potom v čase $(t+1)$ bude σ_{t+1}^2 klesat.

Tabulka 4-5 Odhadnuté parametry modelu GARCH (1,1) a modelů krátkodobé úrokové sazby

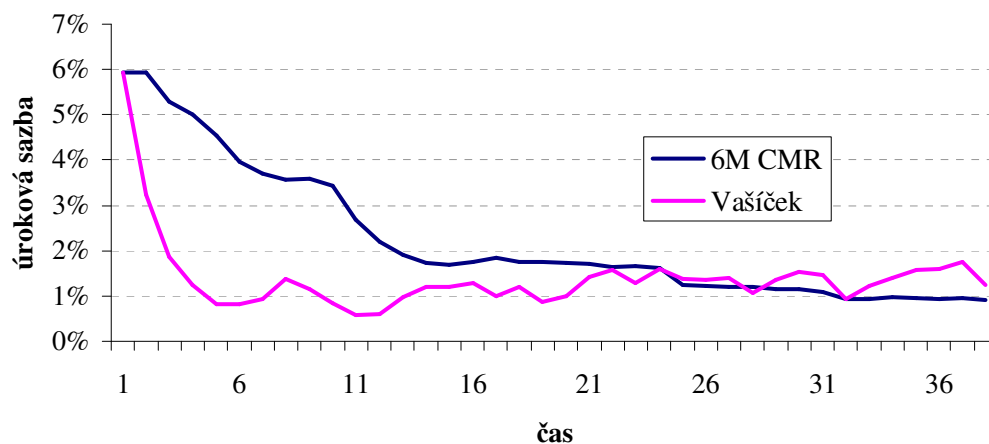
	Parametr	Příklad G	Příklad H	Příklad I
GARCH (1,1)	a_0	5E-07	1,5E-07	0,000115
	a_1	0,81027 *	0,7158 *	0,297258 *
	b_1	0,18972 *	0,2841 *	0,702742 *
Vašíček, CIR	α_0	0,00625 *	0,00037 *	0,000109
	α_1	0,51913 *	0,04000 *	0,005348 *
	k	19,726	3,999	2,770
	μ	1,204%	0,940%	2,042%

* statisticky významné na 5% hladině významnosti

Graf 4-9 GARCH (1,1)



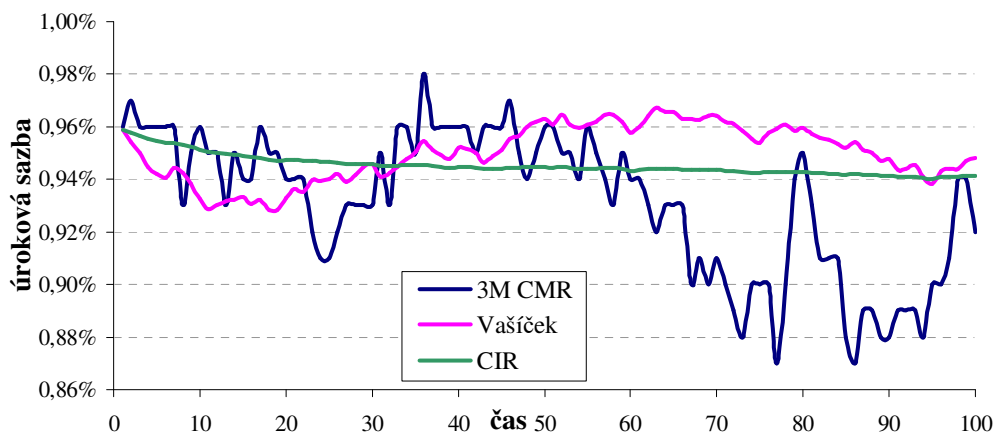
Graf 4-10 Vašíček a 6M CMR v modelu GARCH(1,1)



Příklad H

Vstupní data tvoří denní kurzy americké úrokové sazby Constant Maturity Rate se splatností 3 měsíce, období 5. 9. 03 – 30. 1. 04. Celkem 100 pozorování. Výstupem je tabulka 4-5 a graf 4-11.

Graf 4-11 Vašíček, CIR a 3M CMR v modelu GARCH (1,1)

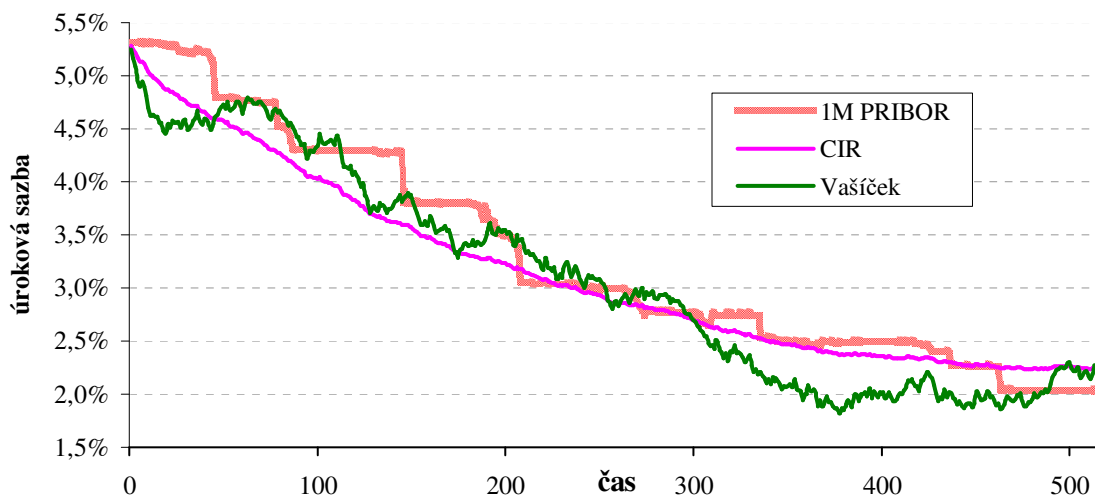


Vstupní data tohoto příkladu jsou shodná s příkladem E, rozdíl je ve způsobu výpočtu parametrů modelu. Minule byla uplatňována metoda nejmenších čtverců, nyní je to metoda maximální věrohodnosti. Z hlediska porovnání výsledků lze říci, že obě metody odhadly dlouhodobě rovnovážnou úrokovou sazbu stejně, rozdíl je v rychlosti přibližování k této hodnotě.

Příklad I

Vstupní data tvoří denní kurzy 1M PRIBOR, období 27. 9. 01 – 30. 1. 04. Celkem 518 pozorování. Výstupem je tabulka 4-5 a graf 4-12.

Graf 4-12 Vašíček, CIR a 1M PRIBOR v modelu GARCH (1,1)



Podobně jako v příkladech s podobnými vstupními daty, modely nedostatečně kopírují vývoj úrokové sazby. Statistická nevýznamnost parametru α_1 indikuje, že ho nemůžeme zařadit do modelu. Obtížně lze najít vhodný model pro řadu úrokové sazby 1M PRIBOR, která se mění skoky a posléze udržuje určitou úroveň.

GARCH - shrnutí

Použitím modelu GARCH (1,1) a metody maximální věrohodnosti k určení parametrů modelu krátkodobé úrokové sazby jsme získali výsledky, které byly obdobné výsledkům vypočteným s použitím metody nejmenších čtverců. Při pohledu na tabulku 4-5 zjistíme, že parametr a_0 modelu GARCH (1,1) je ve všech případech statisticky nevýznamný, proto ho nelze zařadit do výsledného modelu. Další parametry a_1, b_1 už statisticky významné jsou, navíc jejich součet se rovná jedné. To připomíná model EWMA, kdy odhadujeme pouze jeden parametr (rovnice (3.54)), tedy můžeme říci, že na základě empirických zjištění k odhadu volatilitu se více hodí model EWMA než dříve formulovaný model GARCH pro jedno období.

Metoda momentů GMM a CKLS

Vycházíme z kapitoly 3.2.2. Model CKLS odhaduje nejen parametry pro změnu úrokové sazby, ale také pro její volatilitu. Jedná se o 4 parametry v rovnici:

$$dr_t = \alpha \cdot (\mu - r_t) \cdot dt + \sigma \cdot r_t^\gamma \cdot dz_t$$

Model CKLS lze jednoduše změnit ve Vašíčekův nebo CIR model pozměněním parametrů σ a γ . Úloha byla řešena s použitím doplňku Řešitel aplikace EXCEL.

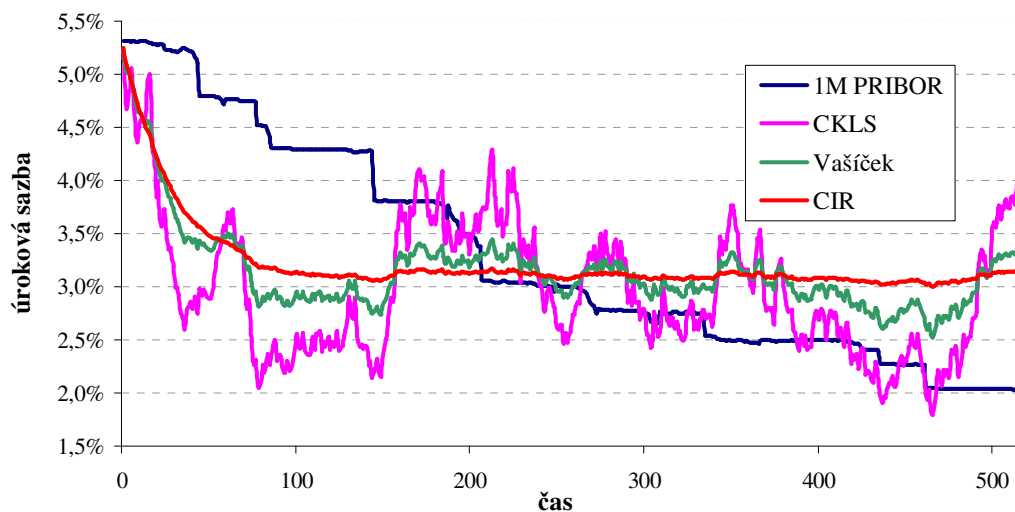
Příklad J

Vstupní data tvoří denní kurzy 1M PRIBOR, období 27. 9. 01 – 30. 1. 04. Celkem 518 pozorování. Výstupem je tabulka 4-6 a graf 4-13.

Tabulka 4-6 Odhadované parametry modelů úrokové sazby s použitím metody GMM

Parametr	Příklad J			Příklad K	
	CKLS	Vašíček	CIR	Vašíček	CIR
α	17,028	17,028	17,028	0,93134	0,93134
μ	3,104%	3,104%	3,104%	0,891%	0,891%
σ	1,0000	0,01015	0,01015	0,00027	0,00027
γ	0,9999	0	0,5	0	0,5

Graf 4-13 Vašíček, CIR a CKLS za použití GMM

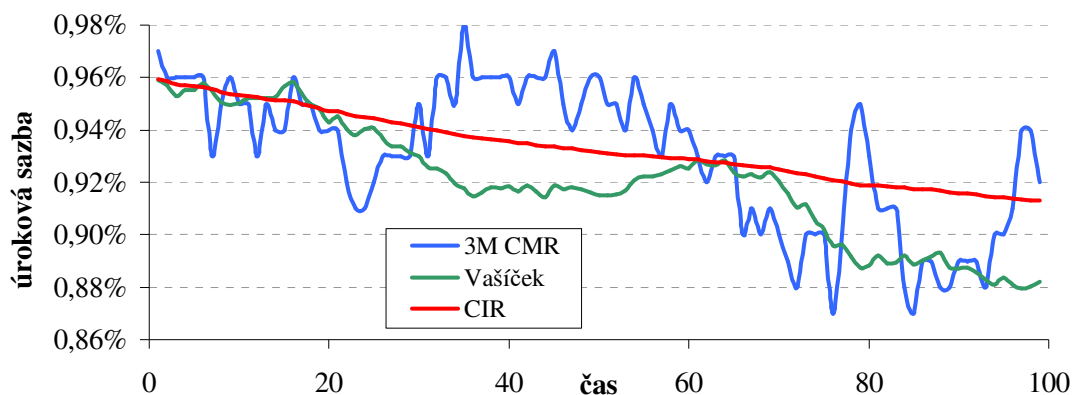


Z grafu 4-13 je zřejmé, že ani jeden model jehož parametry byly vypočteny pomocí GMM není schopen kopírovat klesající trend vývoje 1M PRIBOR. Pro Vašíčekův a CIR model byla hodnota σ vypočtena standardně jako směrodatná odchylka historické časové řady.

Příklad K

Vstupní data tvoří denní kurzy americké úrokové sazby Constant Maturity Rate se splatností 3 měsíce, období 5. 9. 03 – 30. 1. 04. Celkem 100 pozorování. Výstupem je tabulka 4-6 a graf 4-14.

Graf 4-14 Vašíček a CIR s použitím GMM



Do grafu 4-14 nebyl zahrnut model CKLS, který má α a μ stejné jako u ostatních modelů, avšak parametry σ a γ jsou rovny 1. Tento příklad lze srovnat s příklady E a H, které pracují se stejnými vstupními daty, ale používají jinou techniku.

GMM a CKLS – shrnutí

Z teoretického hlediska by měl model CKLS ve spolupráci s metodou GMM dosahovat nejlepších výsledků. To díky odhadování všech čtyř neznámých parametrů modelu CKLS charakterizujících změnu úrokové sazby a její volatilitu. V této práci se však tato empirická zkušenost jiných studií nepotvrzuje.

4.3. Analýza hlavních komponent (PCA)

V této části se pokusíme zjistit hlavní komponenty úrokových sazeb na americkém a českém trhu. K výpočtům byl použit počítačový program SPSS (Statistical Program for Social Science).

Americký trh

Byly použity americké úrokové sazby Treasury Constant Maturity Rate. Jedná se o týdenní sazby v období od 8. 5. 1998 do 30. 1. 2004 tj. časová řada čítající 300 pozorování. Byly vybrány úrokové sazby se splatnostmi 3 a 6 měsíců, dále se splatností 1, 2, 3, 5, 7, 10 a 20 let.

Program SPSS používá ke stanovení hlavních komponent kovarianční nebo korelační matici výchozích hodnot. Byla vybrána korelační matice, jejíž hodnoty zachycuje tabulka 4-7.

Tabulka 4-7 Korelační matice vybraných amerických úrokových sazeb

	20Y	10Y	7Y	5Y	3Y	2Y	1Y	6M	3M
20Y	1,000	0,981	0,967	0,944	0,906	0,877	0,815	0,775	0,753
10Y	0,981	1,000	0,993	0,983	0,954	0,932	0,881	0,848	0,829
7Y	0,967	0,993	1,000	0,996	0,980	0,964	0,923	0,894	0,877
5Y	0,944	0,983	0,996	1,000	0,991	0,980	0,946	0,921	0,906
3Y	0,906	0,954	0,980	0,991	1,000	0,997	0,978	0,960	0,948
2Y	0,877	0,932	0,964	0,980	0,997	1,000	0,990	0,977	0,967
1Y	0,815	0,881	0,923	0,946	0,978	0,990	1,000	0,996	0,991
6M	0,775	0,848	0,894	0,921	0,960	0,977	0,996	1,000	0,998
3M	0,753	0,829	0,877	0,906	0,948	0,967	0,991	0,998	1,000

Z korelační matice je zřejmá pozitivní korelace amerických úrokových sazeb. Korelace dvou úrokových sazeb klesá se zvyšováním rozdílu jejich dob do splatnosti.

Analýza hlavních komponent určuje hlavní komponenty pomocí maximalizace procentního vysvětlení rozptylu původních proměnných. Tabulka 4-8 ukazuje vlastní čísla (eigenvalue) jednotlivých komponent včetně procentního podílu na celkovém rozptylu.

Tabulka 4-8 Vlastní (charakteristická) čísla jednotlivých komponent

Komponenta	Vlastní čísla (eigenvalue)		
	Absolutně	% rozptylu	Kumulativní %
1	8,476000	94,179000	94,18
2	0,490000	5,447000	99,63
3	0,020670	0,230000	99,86
4	0,009227	0,103000	99,96
5	0,002047	0,022750	99,98
6	0,000684	0,007598	99,99
7	0,000564	0,006261	99,99
8	0,000397	0,004405	100,00
9	0,000133	0,001477	100,00

První hlavní komponenta vysvětluje 94,18% celkového rozptylu. Není tedy problém nahradit výchozích 9 úrokových sazeb touto jedinou hlavní komponentou. Analýza hlavních komponent se však většinou soustřeďuje na první tři komponenty, tedy budeme pracovat s nimi i nadále. Procentní podíl druhé a třetí komponenty na celkovém rozptylu je 5,45% a 0,23%.

Tabulka 4-9 představuje hodnoty prvních tří komponent. K lepšímu grafickému zobrazení komponent slouží hodnoty komponentních skóre, které jsou rovněž uvedeny v této tabulce. Komponentní skóre zajišťují, že křivky hlavních komponent oscilují kolem jedné hodnoty, většinou kolem 0.

Tabulka 4-9 Hodnoty prvních tří komponent a jejich skóre

	Komponenta			Komponentní skóre		
	1	2	3	1	2	3
3M	0,901	0,431	-0,005	0,606	-0,282	-1,977
6M	0,886	0,462	0,010	0,542	-0,274	-2,345
1Y	0,852	0,521	0,035	0,406	-0,243	-2,331
2Y	0,776	0,624	0,076	0,146	-0,134	3,051
3Y	0,729	0,677	0,091	0,016	-0,044	6,054
5Y	0,642	0,760	0,103	-0,153	0,163	2,848
7Y	0,588	0,806	0,071	-0,222	0,31	-0,695
10Y	0,508	0,857	0,057	-0,286	0,502	-3,094
20Y	0,398	0,915	-0,058	-0,311	0,748	-1,968

První sloupec tabulky představuje jednotlivé výchozí úrokové sazby s různými dobami do splatnosti. 2. až 4. sloupec (popřípadě 5. až 7. sloupec) zobrazuje hodnoty prvních tří komponent či jejich skóre. Hodnoty první komponenty v druhém sloupci tvoří vlastní, charakteristický vektor dané komponenty (eigenvector).

V teoretické části byla uvedena rovnice (3.58), na základě které bylo možné vyjádřit určitou komponentu jako lineární kombinaci jednotlivých úrokových sazeb. Rovnice prvních tří komponent jsou uvedeny:

$$Z_1 = 0,901 \cdot R_1 + 0,886 \cdot R_2 + 0,852 \cdot R_3 + 0,776 \cdot R_4 + 0,729 \cdot R_5 + 0,642 \cdot R_6 + 0,588 \cdot R_7 + 0,508 \cdot R_8 + 0,398 \cdot R_9$$

$$Z_2 = 0,431 \cdot R_1 + 0,462 \cdot R_2 + 0,521 \cdot R_3 + 0,624 \cdot R_4 + 0,677 \cdot R_5 + 0,760 \cdot R_6 + 0,806 \cdot R_7 + 0,857 \cdot R_8 + 0,915 \cdot R_9$$

$$Z_3 = -0,005 \cdot R_1 + 0,010 \cdot R_2 + 0,035 \cdot R_3 + 0,076 \cdot R_4 + 0,091 \cdot R_5 + 0,103 \cdot R_6 + 0,071 \cdot R_7 + 0,057 \cdot R_8 - 0,058 \cdot R_9$$

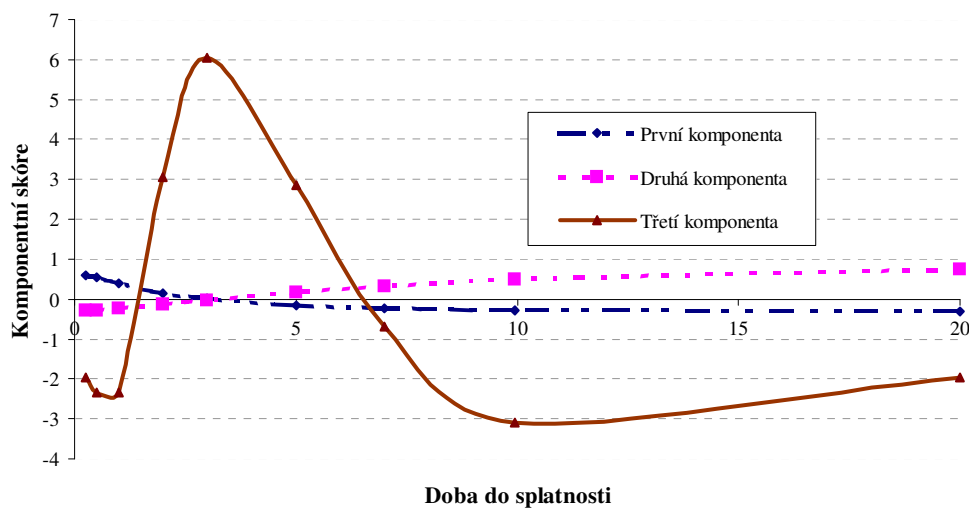
Při pohledu na hodnoty hlavních komponent či jejich skóre je zřejmé, že hodnoty první hlavní komponenty klesají pro úrokové sazby s delší dobou do splatnosti. První komponenta, která označuje paralelní posuny úrokových sazeb, naznačuje, že úrokové sazby s dobou splatnosti od 3 měsíců do 3 let se vyvíjejí opačně oproti úrokovým sazbám s dobou splatností 5 až 20 let. Hodnota komponentních skóre je kladná u krátkodobých úrokových sazeb a záporná u dlouhodobých úrokových sazeb.

Vývoj druhé komponenty, která rozhoduje o sklonu výnosové křivky, je rostoucí, tedy je protikladem první komponenty. Hodnoty komponentních skóre pro dobu splatnosti od 3 měsíců do 3 let jsou záporné, později přecházejí v kladné hodnoty.

Pohledem na hodnoty skóre třetí komponenty zjistíme, že krátkodobé sazby (do 1 roku) a dlouhodobé sazby (nad 7 let) se pohybují v jiném směru než sazby střednědobé (2 až 5 let).

Graf 4-15 znázorňuje křivky hlavních komponent při použití hodnot komponentních skóre.

Graf 4-15 Hlavní komponenty amerických úrokových sazeb



Český trh

Pro analýzu hlavních komponent českých úrokových sazeb byly použity časové řady úrokových sazeb PRIBOR a IRS. V analýze jsou zastoupeny denní sazby PRIBOR se splatností 3, 6 a 9 měsíců, dále sazby IRS se splatností 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 a 10 let. Časová řada zahrnuje 1093 pozorování v období od 10. 11. 1998 do 17. 10. 2003

V tabulce 4-10 jsou uvedeny výchozí korelační koeficienty domácích úrokových sazeb. Je zřejmé, že tyto sazby jsou velice silně (až extrémně) korelovány, neboť všechny korelační koeficienty přesahují hodnotu 0,935.

Tabulka 4-10 Korelace úrokových sazeb PRIBOR a IRS

	3M	6M	9M	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	6Y	7Y	8Y	9Y	10Y
3M	1,000	0,998	0,995	0,987	0,970	0,955	0,947	0,942	0,939	0,937	0,936	0,935	0,935
6M	0,998	1,000	0,999	0,994	0,982	0,971	0,963	0,959	0,956	0,954	0,953	0,953	0,952
9M	0,995	0,999	1,000	0,995	0,988	0,978	0,972	0,968	0,966	0,964	0,963	0,962	0,962
1Y	0,987	0,994	0,995	1,000	0,988	0,980	0,975	0,972	0,971	0,969	0,969	0,969	0,969
2Y	0,970	0,982	0,988	0,988	1,000	0,998	0,995	0,993	0,991	0,989	0,988	0,987	0,986
3Y	0,955	0,971	0,978	0,980	0,998	1,000	0,999	0,998	0,996	0,995	0,993	0,992	0,991
4Y	0,947	0,963	0,972	0,975	0,995	0,999	1,000	1,000	0,999	0,997	0,996	0,995	0,994
5Y	0,942	0,959	0,968	0,972	0,993	0,998	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,997	0,996
6Y	0,939	0,956	0,966	0,971	0,991	0,996	0,999	1,000	1,000	1,000	0,999	0,999	0,998
7Y	0,937	0,954	0,964	0,969	0,989	0,995	0,997	0,999	1,000	1,000	1,000	0,999	0,999
8Y	0,936	0,953	0,963	0,969	0,988	0,993	0,996	0,998	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000
9Y	0,935	0,953	0,962	0,969	0,987	0,992	0,995	0,997	0,999	0,999	1,000	1,000	1,000
10Y	0,935	0,952	0,962	0,969	0,986	0,991	0,994	0,996	0,998	0,999	1,000	1,000	1,000

Z následující tabulky 4-11 charakterizující podíl jednotlivých komponent na celkovém rozptylu lze vyčíst, že první čtyři komponenty vysvětlují 100% celkového rozptylu (v důsledku zaokrouhlení na 1 desetinné místo). Tuto skutečnost lze doslova vysvětlit extrémní pozitivní korelací mezi krátkodobými a dlouhodobými úrokovými sazbami.

Tabulka 4-11 Vlastní (charakteristická) čísla prvních čtyř komponent

Komponenta	Vlastní čísla (eigenvalue)		
	Absolutně	% rozptylu	Kumulativní %
1	12,762000	98,167000	98,2
2	0,213000	1,635000	99,8
3	0,016460	0,127000	99,9
4	0,006408	0,049290	100,0

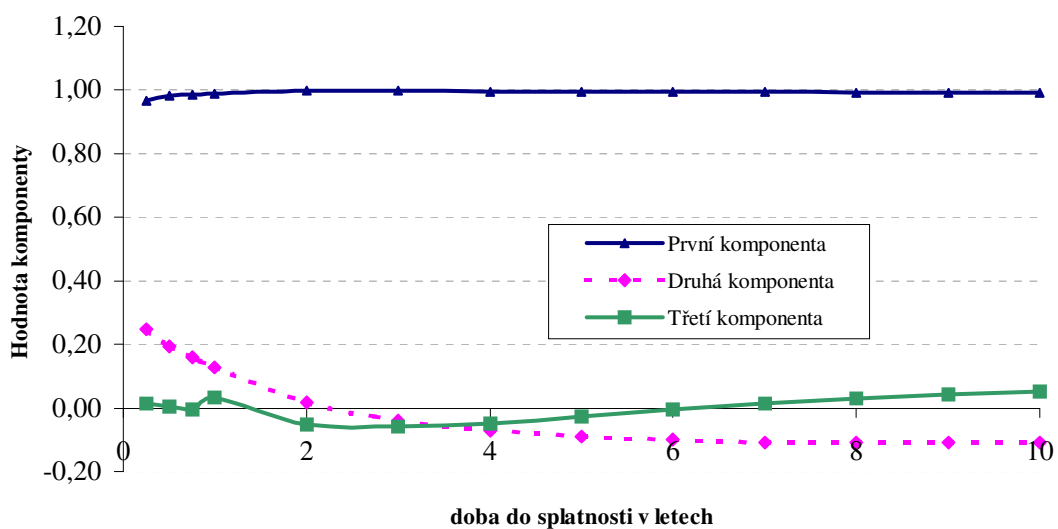
Tabulka 4-12 vypovídá, že hodnoty první komponenty mírně kolísají kolem hodnoty 0,98 na celé délce dob do splatnosti. Při zohlednění faktu, že tato komponenta vysvětluje 98,2% původního rozptylu, je možné říci, že všechny sazby se pohybují stejně. Rovnice pro jednotlivé komponenty se stanoví obdobným způsobem jak bylo provedeno na příkladech z amerického trhu.

Tabulka 4-12 Hodnoty prvních tří komponent

	3M	6M	9M	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	6Y	7Y	8Y	9Y	10Y
1. komp.	0,968	0,981	0,987	0,989	0,998	0,997	0,996	0,995	0,995	0,994	0,993	0,993	0,992
2. komp.	0,247	0,194	0,160	0,127	0,018	-0,038	-0,071	-0,090	-0,100	-0,107	-0,110	-0,110	-0,110
3. komp.	0,015	0,005	-0,004	0,032	-0,051	-0,059	-0,048	-0,028	-0,005	0,016	0,031	0,044	0,054

Graf 4-16 znázorňuje křivky jednotlivých komponent, jejichž hodnoty tvoří eigenvector.

Graf 4-16 Křivky hlavních komponent českých úrokových sazeb



5. Závěr

Cílem práce bylo zjistit a ověřit, které z postupů a modelů nejvíce vyhovují určitým typům úrokových sazeb. Hlavní poznatky a závěry jednotlivých kapitol lze shrnout následovně.

Kapitola č. 2 popisuje základní charakteristiky úrokových sazeb a výnosových křivek. Úrokové sazby jsou zkoumány z nejrůznějších hledisek, jsou znázorněny vztahy mezi krátkodobou a dlouhodobou nebo spotovou a forwardovou úrokovou sazbou. Výnosová křivka graficky představuje časovou strukturu úrokových sazeb, proto v této kapitole byly posuzovány různé teorie, vývoje či typy výnosových křivek. V závěru kapitoly byla rovněž nastíněna podstata vyhlazování výnosových křivek včetně uvedení názorných příkladů.

Třetí kapitola představuje metodická východiska nejrůznějších modelů úrokových sazeb, která jsou posléze aplikována v ověřovací části. Hlavní část této studie je věnována náhodným změnám úrokové sazby. Jsou znázorněny typy jednotlivých modelů, metody odhadu jejich parametrů či modely odhadu volatility úrokových sazeb.

V závěru kapitoly je poukázáno na analýzu hlavních komponent, která využívá fakt, že úrokové sazby s rozdílnou dobou do splatnosti se vyvíjejí podobně. Zkoumání těchto závislostí vyžaduje práci s velkým počtem dat a je časově náročné, proto analýza hlavních komponent nahrazuje původní úrokové sazby novými veličinami - komponentami. To však bez ztráty informací, které dané úrokové sazby nesou.

Na začátku čtvrté kapitoly – praktické části byla zkonstruována výnosová křivka českých státních dluhopisů. Byl graficky znázorněn její rostoucí tvar (graf 4-1), z čehož vyplývá, že v budoucnu se očekává růst nominálních úrokových sazeb. Použitím vyhlazovací techniky aproximace kubickým polynomem po částech (vytvořen počítačový program, jehož algoritmus je uveden v příloze č. 1) byly získány hodnoty úrokových sazeb pro jakoukoliv denní dobu do splatnosti v rozmezí 0-15 let, tedy celkem 5400 možných dob do splatnosti. To je užitečné zejména při odhadování výše výnosu do splatnosti stejných finančních instrumentů lišících se dobou do splatnosti. V grafu 4-2 byla graficky potvrzena správnost tvrzení, že vztah spotové a forwardové výnosové křivky je shodný se vztahem křivek průměrných a marginálních veličin.

Odhadování parametrů vybraných modelů úrokových sazeb (Vašíček, CIR, CKLS) bylo provedeno na 11 příkladech (A-K), které se lišily vstupními daty i metodami odhadu. Byly použity 3 metody odhadu: metoda nejmenších čtverců, metoda maximální věrohodnosti a metoda momentů. Jako vstupní data byly použity české, britské a americké úrokové sazby, úrokové sazby z trhu dluhopisů a z mezibankovního trhu, dále historické řady úrokových sazeb s denními, týdenními či měsíčními údaji. Výjimkou nebyly ani řady úrokových sazeb se skokem (rapidní změna výše úrokové sazby). Výsledné parametry byly posléze testovány na statistickou významnost.

Bylo zjištěno, že k odhadování parametrů jednotlivých modelů vyhovuje více metoda nejmenších čtverců než metoda věrohodnosti či metoda momentů. Všechny tři metody dávaly podobné výsledky, avšak díky své jednoduchosti lze metodu nejmenších čtverců považovat za nejvhodnější. Po provedení ověřovacích výpočtů můžeme říci, že Vašíčkovu nebo CIR modelu odpovídají nejvíce vstupní data této charakteristiky: malý počet pozorování, denní kurzy úrokových sazeb a bez významných skoků (šoků). To bylo potvrzeno i statistickým testováním, kdy všechny parametry modelu byly na 5%-ní hladině významnosti statisticky významné.

Odhad volatility pohybu úrokových sazeb byl proveden pomocí modelu GARCH(1,1) a metody maximální věrohodnosti. Na základě výsledných hodnot odhadovaných parametrů tohoto modelu lze konstatovat, že k odhadu volatility postačí odhadovat pouze 1 parametr, tedy že se jedná o model EWMA.

Analýza hlavních komponent provedena na amerických i českých úrokových sazbách potvrdila, že k analýze úrokových sazeb různých dob do splatnosti postačí formulovat pouze jednu komponentu jež vysvětluje 94,18% resp. 98,17% původního rozptylu. Hodnota první komponenty stanovené pro český trh osciluje kolem hodnoty 0,98 a proto lze říci, že se úrokové sazby s různými dobami do splatnosti pohybují stejně. To je možné díky značné, v případě českého trhu až extrémní korelaci jednotlivých úrokových sazeb. Hodnoty korelačních koeficientů českých úrokových sazeb PRIBOR a IRS převyšovaly hodnotu 0,935. Silnou pozitivní korelaci českých úrokových sazeb PRIBOR lze rovněž zaznamenat při pohledu na graf 4-6, kde je zobrazen vývoj v čase úrokových sazeb PRIBOR s dobou do splatnosti od jednoho dne po jeden rok.

Seznam použité literatury

Publikace:

ADAMS, A. T. *Investment mathematics and statistics*. 1.vyd. London: Kluwer Law International, 1993. 410 s. ISBN 1-85333-498-7

BLAKE, D. *Analýza finančních trhů*. 1. vyd. Praha: Grada. 1995. 623 s. ISBN 80-7169-201-8

CAMPBELL, J. Y., LO, A. W., MACKINLAY, C. A. *The economics of financial markets*. 1. vyd. Princeton: Princeton University Press, 1997. 611 s. ISBN 0-691-04301-9

FABOZZI, F. J. *Advances in fixed income valuation modeling and risk management*. 1 vyd. New Hope: Fabozzi Associates, 1997. 397 s. ISBN 1-883249-17-1

FABOZZI, F. J. *The handbook of fixed income securities*. 6. vyd. New York: McGraw-Hill, 2000. 1373 s. ISBN 0-07-135805-6

JAMES, J., WEBBER, N. *Interest rate modeling*. 1. vyd. Chichester: Wiley, 2000. 654 s. ISBN 0-471-97523-0

ZMEŠKAL, Z. *Finanční modely*. 1. vyd. Ostrava: VŠB-TUO, 2002. 204 s. ISBN 80-248-0182-5

Internetové odkazy:

www.cnb.cz

www.patriafinance.cz

www.federalreserve.gov

www.ecostat.com

Seznam zkratek

ARCH	AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity
AÚV	Alikvótní Úrokový Výnos
α	rychlost přibližování k dlouhodobé hodnotě úrokové sazby
BDT	Black, Derman and Toy model
BK	Black and Karasinski model
BDFS	Balduzzi, Das, Foresi and Sundaram model
CF	cash flow tj. peněžní toky
CIR	Cox, Ingersol and Ross model
CKLS	Chan, Karolyi, Longstaff and Sanders model
CMR	Constant Maturity Rate
d	diference
EWMA	Exponential Weighted Moving Average
ε_i^2	náhodný šum
f_i	forwardový výnos
GARCH	General AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity
GMM	General method of moments (metoda momentů)
$\theta(t)$	funkce dlouhodobé úrokové sazby
HL	Ho and Lee model
HW	Hull and White model
PRIBOR	Prague Interbank Offered Rate
LIBOR	London Interbank Offered Rate
IRS	Interest Rate Swap
K	kupón
k	rychlost přibližování k dlouhodobé hodnotě úrokové sazby
ML	maximum likelihood method (metoda maximální věrohodnosti)
max	maximum
min	minimum
μ	dlouhodobá rovnovážná hodnota úrokové sazby
n	počet období
$N(0,1)$	normované normální rozdělení
NH	nominální hodnota
PCA	Principal Component Analysis
r_t	spotový výnos
s_t	short výnos
S	cena podkladového aktiva opce
σ	směrodatná odchylka
σ_t^2	rozptyl
TCO	tržní cena obligace
t	čas
τ	doba do splatnosti
X	realizační cena
YTM	yield to maturity (výnos do splatnosti)
y_t	výnos do splatnosti
Z_j	komponent
\tilde{z}_t	náhodná hodnota Wienerova procesu

Přílohy

Příloha č. 1. Algoritmus pro vyhlazování výnosových křivek kubickým polynomem

Vstup: n (počet vstupních souřadnic mínus jedna)

$$x_0, x_1, \dots, x_n$$

$$y_0, y_1, \dots, y_n$$

Krok 1: Pro $i = 0, 1, \dots, n - 1$

Nastav $m_i = x_{i+1} - x_i$

$$n_i = y_{i+1} - y_i$$

Krok 2: Pro $i = 1, \dots, n - 1$

Nastav $q_i = 3 \cdot \left(\frac{n_i}{m_i} - \frac{n_{i-1}}{m_{i-1}} \right)$

Krok 3: Nastav $\alpha_0 = 1$

$$\beta_0 = 0$$

$$\delta_0 = 0$$

Krok 4: Pro $i = 1, \dots, n - 1$

Nastav $\alpha_i = 2 \cdot (m_{i-1} + m_i) - m_{i-1} \cdot \beta_{i-1}$

$$\beta_i = \frac{m_i}{\alpha_i}$$

$$\delta_i = (q_i - m_{i-1} \cdot \delta_{i-1}) / \alpha_i$$

Krok 5: Nastav $\alpha_n = 0$

$$b_n = 0$$

$$\delta_n = 0$$

Krok 6: Pro $j = n - 1, n - 2, \dots, 0$

Nastav $b_j = \delta_j - \beta_j \cdot b_{j+1}$

$$a_j = \frac{n_j}{m_j} - \frac{m_j}{3} (b_{j+1} + 2b_j)$$

$$c_j = \frac{b_{j+1} - b_j}{3m_j}$$

Výstup: x_j, y_j, a_j, b_j, c_j pro $j = 0, 1, \dots, n - 1$

OSNOVA:

1. Úvod.....	7
2. Charakteristika úrokových sazeb a výnosových křivek	11
2.1. Podstata výnosových křivek.....	11
2.2. Vztah úrokových sazeb z hlediska splatnosti.....	12
2.3. Spotové a forwardové úrokové sazby	13
2.4. Konstrukce výnosové křivky.....	16
2.5. Vývoj výnosových křivek	17
2.6. Typy výnosových křivek.....	18
2.7. Teorie výnosových křivek.....	19
2.8. Vyhlazování výnosových křivek.....	20
2.9. Výnosová křivka USA	24
3. Typy modelů úrokových sazeb a jejich odhady.....	25
3.1. Modely krátkodobé úrokové sazby	25
3.1.1. Jednofaktorové modely	27
3.1.2. Vícefaktorové modely	30
3.2. Odhady parametrů vybraných modelů úrokových sazeb	31
3.2.1. Metoda nejmenších čtverců a Vašíčkův model.....	32
3.2.2. Metoda momentů (GMM) a CKLS model.....	32
3.2.3. Metoda maximální věrohodnosti a Vašíčkův model.....	33
3.3. Odhady volatility.....	35
3.3.1. Model ARCH(q).....	35
3.3.2. Model GARCH(p,q).....	35
3.3.3. Model krátkodobé úrokové sazby jako GARCH model	37
3.4. Analýza hlavních komponent (Principal Components Analysis, PCA).....	37
3.4.1. Matematický aparát PCA	38
3.4.2. Interpretace jednotlivých komponent.....	39

4. Ověření vybraných modelů úrokových sazeb.....	41
4.1. Výnosová křivka v ČR	41
4.2. Odhad parametrů vybraných modelů úrokových sazeb	45
4.2.1. Vašíčkův model, CIR model a metoda nejmenších čtverců.....	45
4.2.2. Model GARCH (1,1) a metoda maximální věrohodnosti	51
4.2.3. Metoda momentů GMM a CKLS.....	55
4.3. Analýza hlavních komponent (PCA)	57
4.3.1. Americký trh	57
4.3.2. Český trh	60
5. Závěr.....	63
Seznam použité literatury.....	65
Seznam zkratk	66
Přílohy	67